

# Estudo de estratégias de controlo activo de vibrações para um edifício de dois andares

Leonardo Filipe Guilherme Rodrigues

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da  
Universidade Nova de Lisboa para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Civil - Perfil de Estruturas

Orientador: Doutora Ildi Cismasiu

Júri:

Presidente:	Doutor Manuel Américo Gonçalves da Silva
Arguente:	Doutor Fernando José Almeida Vieira de Coito
Vogal:	Doutora Ildi Cismasiu

Junho de 2011



“Copyright” Leonardo Filipe Guilherme Rodrigues, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de expressar o meu agradecimento à Doutora Ildi Cismasiu pela disponibilidade demonstrada na orientação desta tese.

Quero agradecer a toda a minha família pelo apoio e força que me dão para que eu consiga ultrapassar todas as etapas da minha vida.

Não posso esquecer os meus amigos e companheiros que sempre me ajudaram e apoiaram. Desejo-vos a todos muita sorte!



# Resumo

As estruturas podem ser sujeitas a acções dinâmicas capazes de provocar vibrações excessivas, comprometendo o conforto e, em casos extremos, a segurança dos seus utilizadores. Ao longo das últimas décadas têm sido desenvolvidos e aplicados diversos sistemas de controlo de vibrações em pontes e edifícios altos. Neste trabalho descrevem-se sucintamente alguns sistemas de controlo passíveis de serem aplicados em estruturas de engenharia civil e apresentam-se alguns casos de estudo.

Esta dissertação exemplifica o dimensionamento de um sistema de controlo activo para um modelo de um edifício de dois andares. As vibrações são absorvidas por um amortecedor de massa activo (AMD) posicionado no topo do pórtico.

As técnicas utilizadas para o dimensionamento do controlador fazem parte da teoria de controlo moderno. O primeiro método consiste na alocação de pólos que permite ao projectista mudar directamente as características dinâmicas da estrutura. A segunda metodologia consiste num problema de optimização em que o dimensionamento do controlador é feito de forma a minimizar um índice de desempenho quadrático.

Além de introduzir os princípios básicos de dimensionamento de controladores, será referido o funcionamento de um observador e o seu papel no sistema de controlo.

Na componente prática da tese foi desenvolvido um programa, em MATLAB e SIMULINK, que permite simular o comportamento do pórtico e avaliar a eficiência do sistema de controlo quando se aplicam acções externas.





# Abstract

*Study of active control of vibrations strategies for a two-story building*

Structures can be subjected to dynamic actions capable of inducing excessive vibrations, compromising the comfort and, in extreme cases, the safety of its users. Throughout these last two decades several vibration control systems have been developed, especially in bridges and tall buildings. This work succinctly describes some control systems that can be applied in civil engineering structures and presents a few case studies.

This dissertation demonstrates the design of an active control system for a two-story building model. The vibrations are absorbed by an Active Mass Damper (AMD) placed on top of the structure.

The techniques used for the design of the controller are part of the modern control theory. The first method consists in the pole-assignment which allows the designer to directly change the dynamic characteristics of the structure. The second methodology consists in an optimization problem, in which the design of the controller is made in order to minimize a quadratic performance index.

Besides introducing the basic principles of controller design, there will be a reference to the function of an observer and its role in the control system.

In the practical component of the thesis a program in MATLAB and SIMULINK was developed, allowing to simulate the behavior of the structure and evaluate the efficiency of the control system when subjected to external actions.



## **Palavras chave**

- Controlo de vibrações
- Amortecedor de massa activo
- Dimensionamento de controladores
- Controlo Óptimo

## **Keywords**

- Vibration control
- Active Mass Damper
- Controllers design
- Optimal control



# Índice de Matérias

Índice de Matérias	xi
Índice de Figuras	xv
Índice de Tabelas	xvii
Simbologia e notações	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 A problemática das vibrações em estruturas de engenharia civil . . . . .	1
1.2 Caracterização das técnicas de controlo . . . . .	1
1.3 Aplicações de sistemas de controlo em estruturas . . . . .	4
1.4 Controlo de Vibrações Estruturais em Portugal . . . . .	7
1.5 Objectivos do trabalho . . . . .	10
1.6 Organização do trabalho . . . . .	10
<b>2 Modelação e Análise do Sistema Dinâmico</b>	<b>13</b>
2.1 Descrição do modelo laboratorial AMD-2 . . . . .	13
2.2 Equações do movimento . . . . .	14
2.2.1 Equações do movimento da estrutura sem AMD . . . . .	15
2.2.2 Equações do movimento do sistema com AMD . . . . .	16
2.3 Espaço de Estados . . . . .	18
2.3.1 Solução das equações de estado . . . . .	19
2.3.2 Representação do sistema sem AMD em Espaço de Estados . . . . .	20
2.3.3 Representação do sistema AMD-2 em Espaço de Estados . . . . .	21
2.4 Funções de Transferência . . . . .	22
2.5 Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência . . . . .	23
2.6 Determinação das características físicas de um sistema linear . . . . .	24
2.6.1 Representação dos pólos e zeros no Diagrama de Argand . . . . .	24
2.6.2 Análise de estabilidade de sistema lineares . . . . .	24
2.6.3 Significado físico da posição dos pólos . . . . .	25

2.7	Características dinâmicas da estrutura . . . . .	26
2.7.1	Características dinâmicas da estrutura sem AMD . . . . .	26
2.7.2	Características dinâmicas da estrutura com AMD inactivo . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modelação e Análise de Sistemas de Controlo</b>	<b>29</b>
3.1	Introdução . . . . .	29
3.2	Tipos de sistemas de controlo . . . . .	29
3.2.1	Sistemas de controlo em malha aberta . . . . .	29
3.2.2	Sistemas de controlo em malha fechada . . . . .	29
3.2.3	Comparação entre tipos de sistemas de controlo . . . . .	30
3.3	Diagramas de Blocos . . . . .	30
3.3.1	Sistemas representados por funções de transferência . . . . .	30
3.3.2	Sistemas representados em espaço de estados . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Dimensionamento de controladores</b>	<b>35</b>
4.1	Noção de Controlabilidade . . . . .	35
4.2	Noção de Observabilidade . . . . .	36
4.3	Método da alocação de pólos . . . . .	36
4.3.1	Determinação da matriz de ganho do controlador . . . . .	37
4.3.2	Utilização da fórmula de Ackerman . . . . .	38
4.4	Regulador linear quadrático (LQR) . . . . .	38
4.4.1	Determinação da matriz de ganho do controlador . . . . .	39
4.5	Observadores de estado . . . . .	40
4.5.1	Determinação da matriz de ganho do observador . . . . .	40
4.5.2	Influência do observador na malha de retroacção de estados . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Dimensionamento do sistema de controlo</b>	<b>43</b>
5.1	Dimensionamento de Controladores . . . . .	43
5.1.1	Análise da Controlabilidade do Sistema . . . . .	44
5.1.2	Dimensionamento via alocação de pólos . . . . .	45
5.1.3	Dimensionamento via LQR . . . . .	48
5.2	Dimensionamento do Observador de Estados . . . . .	59
5.2.1	Análise da Observabilidade do sistema . . . . .	60
5.2.2	Dimensionamento via alocação de pólos . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Avaliação do comportamento da estrutura para uma solicitação sísmica</b>	<b>65</b>
6.1	Representação da estrutura sem AMD em espaço de estados . . . . .	65
6.2	Representação da estrutura com AMD em espaço de estados . . . . .	67
6.2.1	Controlo passivo - malha aberta . . . . .	67
6.2.2	Controlo activo - malha fechada . . . . .	68
6.3	Apresentação e apreciação de resultados . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Representação matemática de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo</b>	<b>79</b>
A.1	Transformada de Laplace . . . . .	79
A.2	Transformada Inversa de Laplace . . . . .	80

<b>B</b>	<b>Parâmetros do sistema AMD-2</b>	<b>81</b>
B.1	Matrizes referentes à representação em espaço de estados do sistema AMD-2 .	81
<b>C</b>	<b>Obtenção da matriz de ganho do controlador pelo método LQR</b>	<b>83</b>
<b>D</b>	<b>Obtenção das equações do movimento para solicitação sísmica</b>	<b>85</b>





# Índice de Figuras

1.1	Esquema de funcionamento de um sistema de controlo activo . . . . .	3
1.2	Sistema com diagonais activas [29] . . . . .	3
1.3	Sistema com cabos activos . . . . .	3
1.4	Vista geral do edifício Kyobashi Seiwa [26] . . . . .	5
1.5	Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Kyobashi Seiwa [26]	5
1.6	Esquema do sistema AMD instalado no edifício Applause Tower [33] . . . . .	6
1.7	Esquema de funcionamento do sistema DUOX HMD [31] . . . . .	7
1.8	Vista geral do Hospital da Luz . . . . .	7
1.9	Corte longitudinal da estrutura do Hospital da Luz[9] . . . . .	8
1.10	Vista geral do tabuleiro da ponte Vasco da Gama[9] . . . . .	8
1.11	Amortecedores histeréticos[9] . . . . .	8
1.12	Vista geral da ponte Pedro e Inês . . . . .	9
1.13	Vista geral da ponte, FEUP [6] . . . . .	9
1.14	Efeito do controlo activo utilizando um controlador proporcional à velocidade [6]	10
2.1	Modelo laboratorial AMD-2 . . . . .	13
2.2	Modelo do pórtico de dois pisos sem AMD . . . . .	15
2.3	Modelo do pórtico do sistema AMD-2 . . . . .	17
2.4	Diagrama de Argand . . . . .	25
2.5	Representação de pólos no Diagrama de Argand . . . . .	26
3.1	Esquema de um sistema de controlo em malha aberta . . . . .	29
3.2	Esquema de um sistema de controlo em malha fechada . . . . .	30
3.3	Esquema de um bloco . . . . .	31
3.4	Diagrama de blocos de um sistema de controlo em malha-aberta . . . . .	31
3.5	Bloco equivalente a duas funções de transferência em série . . . . .	31
3.6	Diagrama de blocos de sistema de controlo em malha-fechada . . . . .	31
3.7	Bloco equivalente a sistema realimentado com retroacção negativa . . . . .	32
3.8	Bloco equivalente à operação de integração . . . . .	32
3.9	Bloco equivalente à operação de derivação . . . . .	33
3.10	Diagrama de blocos de um sistema representado em espaço de estados . . . . .	33

## Índice de Figuras

---

3.11	Diagrama de blocos de um sistema controlado via realimentação de estados . . .	34
4.1	Diagrama de blocos de um sistema de controlo com observador de estados . . . .	42
5.1	Diagrama de blocos geral para dimensionamento do controlador . . . . .	44
5.2	Diagrama de blocos da representação em espaço de estados para dimensionamento do controlador . . . . .	44
5.3	Caso 1 - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada . .	46
5.4	Caso 1 - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	46
5.5	Caso 2 - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada . .	47
5.6	Caso 2 - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	48
5.7	1ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada	50
5.8	1ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	50
5.9	2ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada	52
5.10	2ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	52
5.11	3ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada	54
5.12	3ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	54
5.13	4ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada	56
5.14	4ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	56
5.15	5ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada	58
5.16	5ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD . . . . .	58
5.17	Diagrama de blocos geral para dimensionamento do observador . . . . .	59
5.18	Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do sistema AMD-2 .	60
5.19	Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do observador . . . .	60
5.20	Observador 1 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa . . . . .	62
5.21	Observador 2 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa . . . . .	63
5.22	Observador 3 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa . . . . .	64
6.1	Diagrama de blocos em Simulink - Sismo de Kobe - sem AMD . . . . .	66
6.2	Diagrama de blocos em Simulink - Sismo de Kobe - com AMD . . . . .	69
6.3	Diagrama de blocos de espaço de estados referente à actuação de um sismo . . .	69
6.4	Diagrama de blocos do observador de estados referente à actuação de um sismo .	69
6.5	Sinal equivalente ao sismo de Kobe . . . . .	70
6.6	Deslocamento do piso 1 - controlo passivo . . . . .	71
6.7	Deslocamento do piso 1 - controlo activo . . . . .	71
6.8	Deslocamento do piso 2 - controlo passivo . . . . .	71
6.9	Deslocamento do piso 2 - controlo activo . . . . .	71
6.10	Acelerações do piso 1 - controlo passivo . . . . .	72
6.11	Acelerações do piso 1 - controlo activo . . . . .	72
6.12	Acelerações do piso 2 - controlo passivo . . . . .	72
6.13	Acelerações do piso 2 - controlo activo . . . . .	72
6.14	Deslocamentos do carro para absorver as vibrações . . . . .	72
6.15	Diferença de potencial aplicada ao motor . . . . .	72
D.1	AMD-2 - com aceleração de base . . . . .	85

# Índice de Tabelas

2.1	Características dinâmicas da estrutura sem AMD . . . . .	27
2.2	Características dinâmicas da estrutura com AMD inactivo . . . . .	28
5.1	Especificações dinâmicas . . . . .	43
5.2	Caso 1 - Pólos do sistema em malha aberta e malha fechada . . . . .	45
5.3	Caso 1 - Características dinâmicas dos modos de vibração . . . . .	45
5.4	Caso 2 - Pólos do sistema em malha aberta e malha fechada . . . . .	47
5.5	Caso 2 - Características dinâmicas dos modos de vibração . . . . .	47
5.6	Pólos do sistema (1ª iteração) . . . . .	49
5.7	Características dinâmicas dos modos de vibração (1ª iteração) . . . . .	49
5.8	Valores máximos admissíveis para as variáveis do sistema . . . . .	51
5.9	Pólos do sistema (2ª iteração) . . . . .	51
5.10	Características dinâmicas dos modos de vibração (2ª iteração) . . . . .	51
5.11	Pólos do sistema (3ª iteração) . . . . .	53
5.12	Características dinâmicas dos modos de vibração (3ª iteração) . . . . .	53
5.13	Pólos do sistema (4ª iteração) . . . . .	55
5.14	Características dinâmicas dos modos de vibração (4ª iteração) . . . . .	55
5.15	Pólos dos sistemas de controlo . . . . .	57
5.16	Características dinâmicas dos modos de vibração . . . . .	57
5.17	Comparação dos valores máximos das variáveis do sistema . . . . .	59
6.1	Valores máximos obtidos a partir da simulação do sismo de Kobe . . . . .	70
A.1	Propriedades da Transformada de Laplace . . . . .	80



# Simbologia e notações

## Letras latinas

<b>A</b>	matriz de estado
<b>B</b>	matriz de entrada do sinal de controlo
<b>B<sub>sismo</sub></b>	matriz de entrada do sinal do sismo
<b>C</b>	matriz de saída
<b>C<sub>s</sub></b>	matriz de amortecimento do sistema
<b>D</b>	matriz de transmissão directa do sinal de controlo
<b>D<sub>sismo</sub></b>	matriz de transmissão directa do sinal do sismo
<b>G</b>	matriz de ganho do observador
<b>G(s)</b>	função de transferência
<b>I</b>	matriz identidade
<b>J</b>	função de custo quadrática
<b>K</b>	vector de ganho do controlador
<b>K<sub>s</sub></b>	matriz de rigidez do sistema
<b>L</b>	Lagrangeano do sistema
<b>M<sub>s</sub></b>	matriz de massa do sistema
<b>N</b>	matriz de observabilidade
<b>Q</b>	matriz de ponderação relativa aos estados
<b>R</b>	matriz de ponderação relativa ao sinal de controlo
<b>T</b>	energia cinética do sistema
<b>V</b>	energia potencial do sistema

$\mathbf{W}$	matriz de controlabilidade
$\mathbf{e}(t)$	vector da estimativa do erro
$q_k$	coordenada generalizada $k$
$\dot{q}_k$	velocidade generalizada $k$
$t$	tempo
$t_s$	tempo de estabelecimento
$\mathbf{u}(t)$	vector de entrada do sinal de controlo
$\mathbf{x}(t)$	vector de estado
$\mathbf{x}_o(t)$	vector de estado estimado pelo observador
$\mathbf{y}(t)$	vector de saída
$\mathbf{y}_o(t)$	vector de saída estimado pelo observador

## Símbolos

$\omega$	frequência em $rad/s$
$\omega_i$	frequência natural do modo de vibração $i$
$\omega_d$	frequência amortecida em $rad/s$
$\omega_{d,i}$	frequência amortecida do modo de vibração $i$
$\xi$	coeficiente de amortecimento
$\xi_i$	coeficiente de amortecimento do modo de vibração $i$
$\delta W$	trabalho virtual das forças não inerciais
$\delta T$	energia cinética virtual
$\delta V$	energia potencial virtual

## Siglas

AMD	Amortecedor de massa activo ( <i>Active Mass Damper</i> )
AVS	Sistemas activos variáveis ( <i>Active Variable Systems</i> )
FPS	Sistema pendular com atrito ( <i>Friction Pendular System</i> )
HDRB	Apoios de borracha de alto amortecimento ( <i>High Damping Rubber Bearing</i> )

HMD	Amortecedor de massa híbrido ( <i>Hybrid Mass Damper</i> )
LQR	Regulador linear quadrático ( <i>Liner Quadratic Regulator</i> )
LRB	Apoio de borracha com núcleo de chumbo ( <i>Lead Rubber Bearing</i> )
SMA	Ligas com memória de forma ( <i>Shape Memory Alloys</i> )
TLD	Amortecedor de líquido sintonizado ( <i>Tuned Liquid Damper</i> )
TMD	Amortecedor de massa sintonizado ( <i>Tuned Mass Damper</i> )





# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 A problemática das vibrações em estruturas de engenharia civil

As estruturas de engenharia civil estão sujeitas a vários tipos de acções externas capazes de provocar vibrações excessivas. Como tal, tem aumentado o interesse em investigar e desenvolver técnicas de controlo que melhorem o comportamento dinâmico das estruturas.

Acções dinâmicas severas, como é o caso dos sismos, sujeitam os edifícios a grandes oscilações que podem pôr em causa a segurança dos seus ocupantes. Na área da engenharia sísmica desenvolveram-se e aplicaram-se sistemas de controlo que melhoram o processo de dissipação de energia, aumentando o amortecimento das estruturas.

Para satisfazer as recentes tendências arquitectónicas têm sido empregues materiais que tornam as estruturas mais leves e esbeltas. Os edifícios altos são mais flexíveis e quando sujeitos a acções dinâmicas causadas pelo vento experimentam vibrações que colocam em causa o conforto dos utilizadores. Ao longo das últimas décadas foram desenvolvidos sistemas de controlo de vibrações que visam reduzir os deslocamentos das estruturas melhorando o seu comportamento em serviço.

Existem ainda vibrações causadas por outro tipo de acções como o tráfego rodoviário intenso e a realização de obras na proximidade que podem causar problemas de fendilhação dos elementos estruturais.

As pontes pedonais e as lajes de edifícios são exemplos de estruturas susceptíveis à ocorrência de vibrações, pois as actividades nelas praticadas são caracterizadas por acções dinâmicas sincronizadas. Quando a frequência das acções dinâmicas, induzidas pelas actividades humanas, se aproxima das frequências próprias das estruturas podem ocorrer oscilações que causam desconforto aos utilizadores.

### 1.2 Caracterização das técnicas de controlo

As técnicas de controlo de vibrações em estruturas podem ser englobadas em dois grandes grupos: controlo passivo e controlo activo. De seguida, apresentam-se as principais características de cada técnica bem como exemplos de dispositivos utilizados para atenuar as vibrações em estruturas.

Abordam-se também os sistemas híbridos que combinam dispositivos passivos e activos de modo a mitigar algumas limitações e restrições que cada um apresenta. Nesta secção faz-se

também uma breve descrição dos sistemas de controlo semi-activos que se apresentam como uma solução intermédia entre as técnicas de controlo passivo e activo.

### Sistemas de controlo passivo

A grande capacidade de dissipação de energia é uma das principais características dos dispositivos de controlo passivos.

O sistema de isolamento de base é um exemplo de dissipação de energia proveniente da aceleração do solo devido a acções sísmicas. A estrutura apoia-se em aparelhos com baixa rigidez lateral e elevada deformação na rotura, como é o caso dos aparelhos de borracha com núcleo de chumbo (LRB) e os de borracha de alto amortecimento (HDRB). A energia pode também ser dissipada por atrito através dos sistemas pendulares friccionais (FPS) [32].

Existem outros tipos de dispositivos passivos que permitem dissipar energia em locais devidamente seleccionados, como por exemplo a ligação viga-pilar de um pórtico. A redução da deformação dos elementos estruturais é conseguida através da utilização de amortecedores viscosos, viscoelásticos, friccionais ou histeréticos.

Nos últimos anos têm-se efectuado estudos sobre a aplicação de ligas de memória de forma (SMA) para o controlo passivo de vibrações em estruturas de engenharia civil. As propriedades mais importantes das ligas são a superelasticidade e o efeito de memória de forma.

A superelasticidade permite ao material experimentar grandes deformações sem que advenham deformações residuais, no caso da liga Ni-Ti o material consegue recuperar de deformações da ordem dos 8 %. Durante os ciclos de carga e descarga, o material dissipa energia através de ciclos de deformação histeréticos. O efeito de memória de forma diz respeito à capacidade das ligas poderem restituir à sua forma inicial por acção da temperatura, mesmo quando sujeitas a grandes deformações, sem que as suas capacidades resistentes se alterem [25, 14].

Dentro dos sistemas de controlo passivo encontram-se também os amortecedores de massa sintonizados, TMD (Tuned Mass Dampers), e os amortecedores de líquido sintonizados, TLD (Tuned Liquid Dampers). Estes dispositivos podem ser utilizados, por exemplo, para controlar as vibrações de edifícios altos sujeitos à acção do vento, pontes pedonais e lajes de edifícios quando sujeitas a acções sincronizadas dos utilizadores. No entanto, apenas podem ser sintonizados para um único modo de vibração, ou seja, o sistema não se adapta a solicitações cuja frequência se afasta da frequência para qual o TMD foi calibrado, podendo a resposta ser amplificada nalguns casos [8].

### Sistemas de controlo activo

A aplicação de técnicas de controlo activo requer conhecimentos de dinâmica de estruturas e teoria de controlo. Os sistemas de controlo activo actuam com base em medições das respostas estruturais registadas por sensores, sendo os sinais tratados por intermédio de algoritmos computacionais que por sua vez emitem um sinal ao actuador (Figura 1.1). Desta forma, é possível gerar as forças de controlo necessárias tendo em conta as acções impostas e os objectivos a atingir [16].

O primeiro sistema activo utilizado em estruturas reais foi o sistema AMD (amortecedor de massa activo). As forças de controlo a aplicar à estrutura resultam do movimento de uma massa, que na maior parte dos casos é acoplada no topo dos edifícios. Este tipo de sistema tem a vantagem de se poder localizar em secções onde os modos de vibração têm componentes modais significativas. [19].

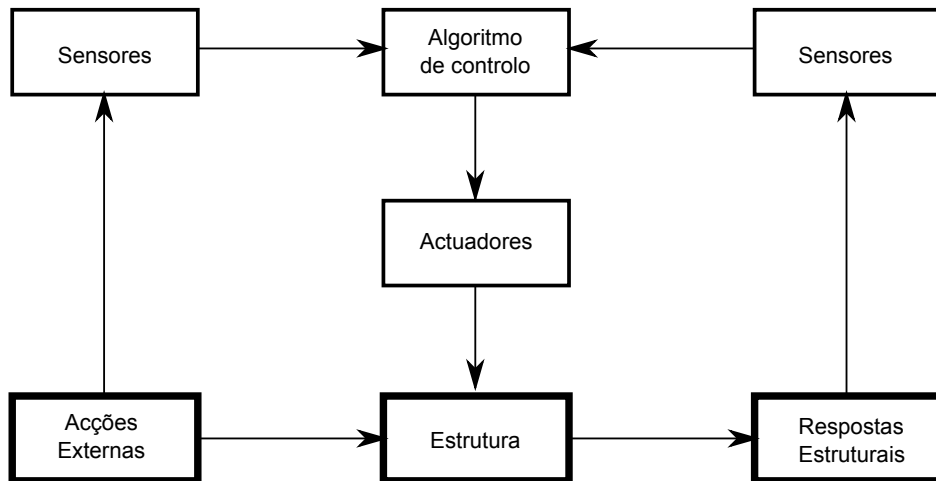


Figura 1.1: Esquema de funcionamento de um sistema de controlo activo

Existem também sistemas de controlo constituídos por diagonais ou cabos activos cuja tensão é controlada pela acção de actuadores electro-hidráulicos. Tal como ilustram as Figuras 1.2 e 1.3, estes elementos podem ser adaptados em pórticos de edifícios e constituem um bom sistema de aplicação de forças. No entanto, poderá não ser possível colocar os dispositivos em zonas de componentes modais máximas dos modos de vibração a controlar[19, 29].

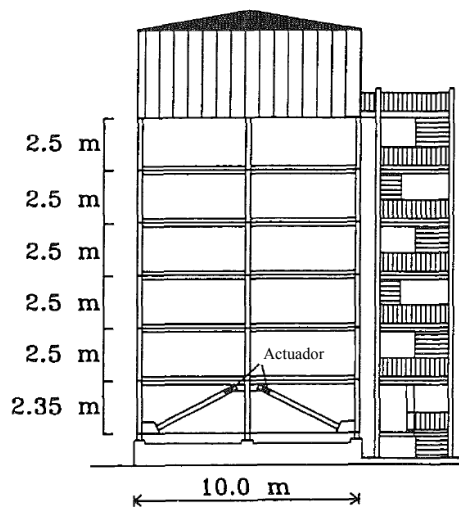


Figura 1.2: Sistema com diagonais activas [29]

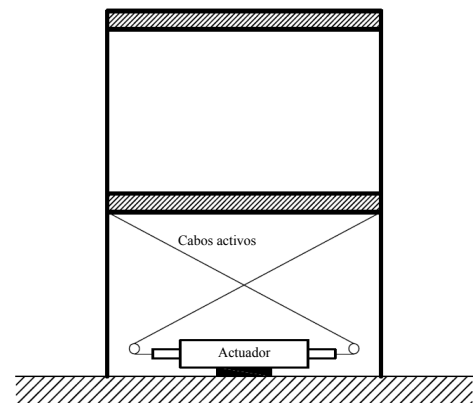


Figura 1.3: Sistema com cabos activos

Os sistemas de controlo activo são eficientes quando se pretende controlar estruturas sujeitas a acções do vento e de sismos moderados. O facto de se poder alterar as características de vários modos de vibração constitui uma das vantagens em relação aos sistemas passivos. No entanto, os sistemas activos necessitam de energia externa para que os actuadores apliquem as forças de controlo à estrutura e caso ocorra um sismo de grande intensidade o sistema poderá ficar inoperante. A aplicação de sistemas de controlo activos também implicam o aumento do

custo directo e de manutenção quando comparados com os sistemas passivos [8, 11].

### Sistemas de controlo híbridos

Os sistemas de controlo activo podem ficar inoperantes quando ocorrem acções severas susceptíveis de inviabilizar a alimentação dos actuadores. Para superar este problema pode-se recorrer à aplicação de um sistema que combine o controlo passivo e activo. Tais sistemas denominam-se como híbridos e conseguem tirar partido da eficiência do controlo activo e da fiabilidade do controlo passivo. Ou seja, se o sistema de controlo activo falhar pelo menos é garantido o funcionamento do controlo passivo. Dentro deste tipo de sistemas enquadram-se os HMD (Amortecedores de massa híbridos) que resultam da combinação do sistema TMD com o sistema AMD [31].

### Sistemas de controlo semi-activo

O controlo semi-activo mostra-se como uma solução que combina as melhores características do sistema activo e do sistema passivo. Estes sistemas conseguem adaptar-se às solicitações externas produzindo forças de grande amplitude através da modificação activa da rigidez ou amortecimento de elementos localizados na estrutura. O funcionamento dos sistemas semi-activos requer menos quantidade de energia, podendo esta ser fornecida através de baterias tornando o controlo imune a problemas de alimentação [8]. Um dos dispositivos de controlo semi-activo mais utilizado é o AVS (Sistemas Activos Variáveis) que possibilita variar a rigidez da estrutura e por conseguinte as suas frequências próprias. Outros exemplos usados para efectuar controlo são os amortecedores de orifício variável, os amortecedores de atrito variável e amortecedores electreológicos/magnetoreológicos [11].

## 1.3 Aplicações de sistemas de controlo em estruturas

Actualmente existe um número considerável de estruturas que possuem dispositivos de controlo activo de vibrações. O Japão e a China são dos países que mais investem no desenvolvimento de controladores activos para que as estruturas tenham um bom comportamento quando sujeitas a acções dinâmicas severas. De seguida, serão apresentados dois casos de aplicação de sistemas AMD e o esquema de funcionamento de um sistema HMD aplicado num edifício da cidade de Tóquio.

### Kyobashi Seiwa Building, Tóquio

O edifício Kyobashi Seiwa (Figura 1.4) é conhecido na comunidade científica por ter sido o primeiro onde se implementou o sistema de controlo activo AMD. Tal como demonstra a Figura 1.5, colocaram-se dois AMD no último dos 11 pisos do edifício.

Tendo em conta que se trata de uma estrutura flexível, o objectivo do controlo passa por reduzir as vibrações provocadas por ventos fortes e sismos moderados que ocorrem com alguma frequência na cidade de Tóquio.

Para absorver as vibrações transversais é usado um AMD cuja massa é de aproximadamente 4 toneladas, enquanto que o segundo AMD tem uma massa de 1 tonelada e possibilita controlar os modos de torção do edifício.

As forças de controlo são aplicadas por actuadores hidráulicos controlados por um computador que se baseia em sinais emitidos pelo sistema de observação, instalado na base do



Figura 1.4: Vista geral do edifício Kyobashi Seiwa [26]

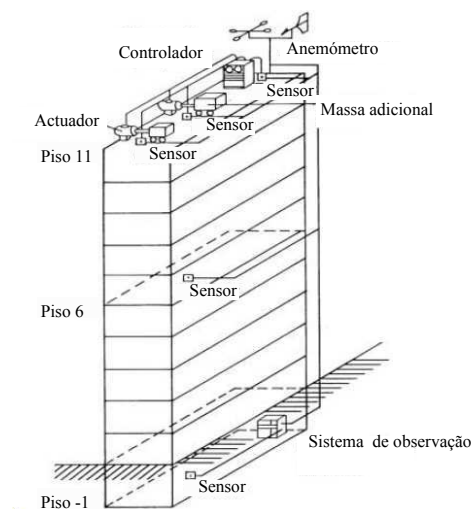


Figura 1.5: Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Kyobashi Seiwa [26]

edifício. O observador recebe as medições dos acelerómetros colocados na base, sexto piso e cobertura, e por um anemómetro responsável por registar a velocidade do vento [8, 26].

Depois de concluída a instalação dos AMD, foram registadas as acelerações do último piso para a acção de ventos fortes, com o objectivo de analisar a resposta do sistema controlado e não-controlado. Os resultados observados demonstraram que o sistema de controlo conseguiu reduzir as acelerações para um terço dos valores registados enquanto inactivo. Tendo em conta que a massa dos AMD é cerca de 1.1% da massa do edifício, os resultados permitem verificar a eficiência do sistema, concluindo-se que este tem cumprido os objectivos para os quais foi dimensionado [13].

### Applause Tower, Osaka

O edifício Applause Tower é outro exemplo de aplicação do sistema AMD em estruturas de engenharia civil. Este edifício tem 34 pisos sendo que a partir do 26º funciona um luxuoso hotel e como tal é exigido um nível de conforto elevado.

Esta estrutura tem a particularidade de a laje do último piso ser utilizada como heliporto e simultaneamente como massa activa do sistema de controlo. O facto de a plataforma possuir uma massa de 480 toneladas faz com que a resposta estrutural seja reduzida de uma forma eficaz. Os dispositivos de apoio da laje são de borracha e possuem baixa rigidez lateral, sendo semelhantes aos utilizados nos sistema de isolamento de base (Figura 1.6).

O sistema de controlo foi dimensionado para reduzir as vibrações transversais do edifício por intermédio de actuadores hidráulicos.

Os resultados obtidos para solicitações sísmicas e ventos fortes demonstram que o sistema AMD permitiu reduzir a resposta estrutural para cerca de metade [13].

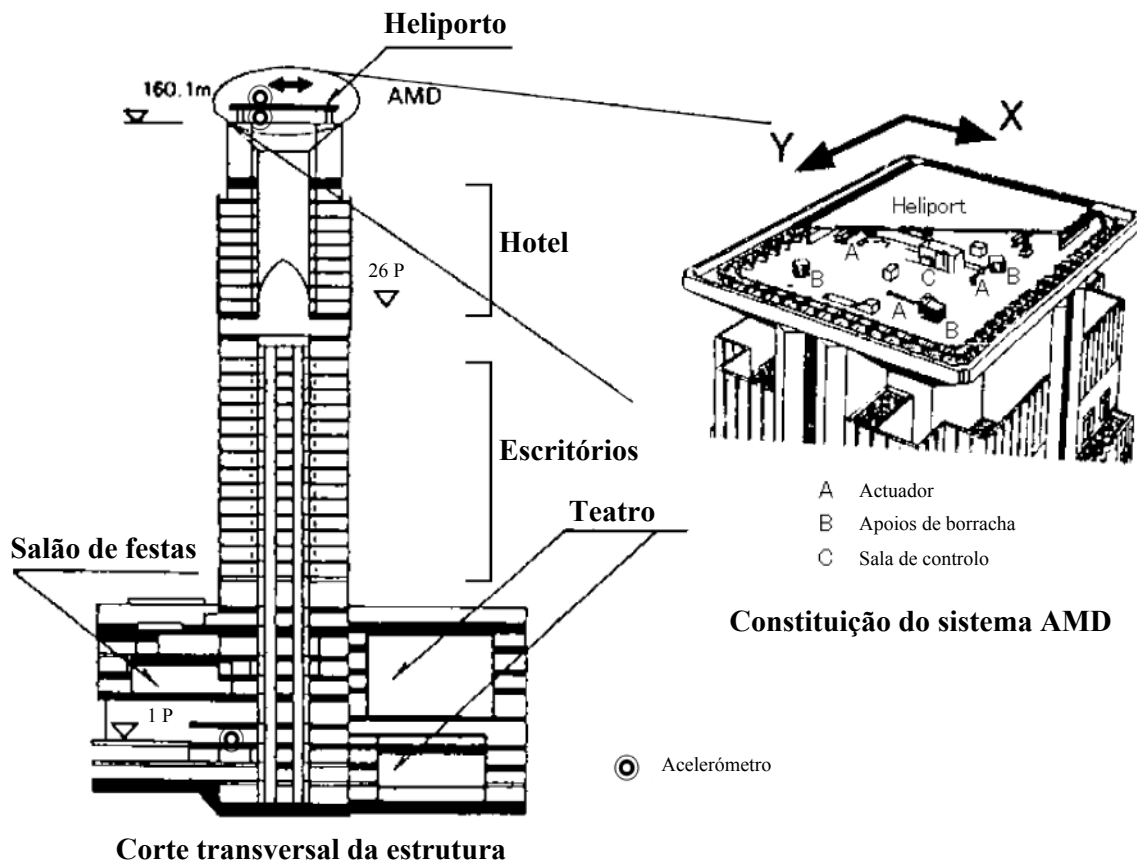


Figura 1.6: Esquema do sistema AMD instalado no edifício Applause Tower [33]

Actualmente os dispositivos de controlo híbridos são os mais empregues para atenuar as vibrações induzidas por ventos fortes e sismos moderados em edifícios altos. A utilização de amortecedores de massa híbridos (HMD) tem crescido nas últimas décadas por serem mais eficazes que os sistemas de controlo TMD e requererem menos energia que os sistemas AMD [26].

### Ando Nishikisho Building, Tóquio

O edifício Ando Nishikisho, construído em 1993, consiste numa estrutura de aço com 2600 toneladas acima do nível do solo. A estrutura tem 14 pisos, sendo que no último encontra-se instalado um sistema DUOX HMD cujo o esquema de funcionamento é demonstrado na Figura 1.7. Este sistema híbrido é constituído por um TMD com 18 toneladas ao qual se adaptou um AMD com apenas 2 toneladas. O sistema AMD tem como objectivo reduzir os problemas de sintonização do TMD e caso o sistema activo falhe é garantido o controlo através do sistema passivo [31].

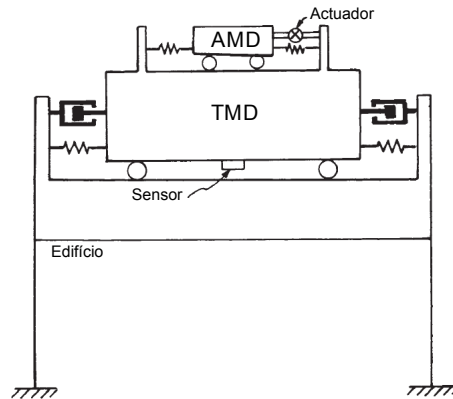


Figura 1.7: Esquema de funcionamento do sistema DUOX HMD [31]

## 1.4 Controlo de Vibrações Estruturais em Portugal

Em Portugal, o projecto de estruturas para resistência aos sismos deve obedecer a regras estabelecidas pela norma NP EN 1998-1 (Eurocódigo 8). Esta norma apresenta regras específicas para o dimensionamento do sistema de isolamento de base. Indica que tipo de materiais podem ser empregues e as precauções a tomar para que o sistema tenha um bom desempenho em serviço, de forma a garantir a segurança para os estados limites últimos e de limitação de danos [1].

O Hospital da Luz, Figura 1.8, foi o primeiro caso de aplicação de controlo passivo de vibrações para reduzir a resposta sísmica de um sistema estrutural. O edifício do hospital é composto por uma base cujas dimensões em planta são  $110 \times 110 \text{ m}^2$  e a estrutura tem 6 pisos (desde o nível -3 até ao nível 2).



Figura 1.8: Vista geral do Hospital da Luz

Foi aplicado um sistema de isolamento de base a partir do piso -1, ou seja, os restantes pisos acompanham os movimentos do solo de fundação. No entanto, existem alguns elementos estruturais cujo isolamento é feito no nível -3 (Figura 1.9), como é o caso da base dos elevadores.

## Introdução

Os aparelhos de apoio são constituídos por blocos de borracha de alto amortecimento (HDRB) com baixa rigidez lateral. Os amortecedores têm forma cilíndrica com diâmetros entre  $400\text{mm}$  e  $900\text{mm}$ , e são feitos de dois tipos de borracha, uma com módulo de distorção  $G = 0.8\text{ MPa}$  e a outra com módulo de distorção  $G = 1.4\text{ MPa}$  [9].

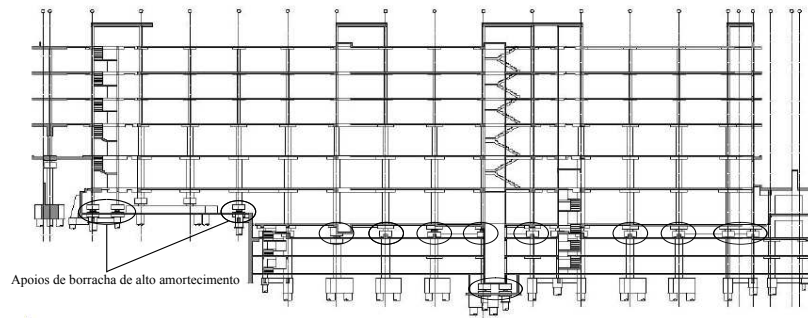


Figura 1.9: Corte longitudinal da estrutura do Hospital da Luz[9]

Nas últimas décadas tem crescido o número de sistemas de isolamento implementados em pontes e viadutos, a maioria destas estruturas estão localizadas no sul do país por ser a zona com maior risco de ocorrência de sismos.

Uma das pontes mais conhecidas é a ponte Vasco da Gama, em Lisboa. Trata-se de uma ponte atirantada com um vão central de  $420\text{m}$  prolongado para ambos os lados por 3 vãos adicionais perfazendo um comprimento total de  $830\text{m}$  (Figura 1.10).

Com o objectivo de reduzir os danos causados por acções sísmicas, colocaram-se amortecedores histeréticos na ligação entre o tabuleiro e os pilares da ponte, Figura 1.11 [9].



Figura 1.10: Vista geral do tabuleiro da ponte Vasco da Gama[9]

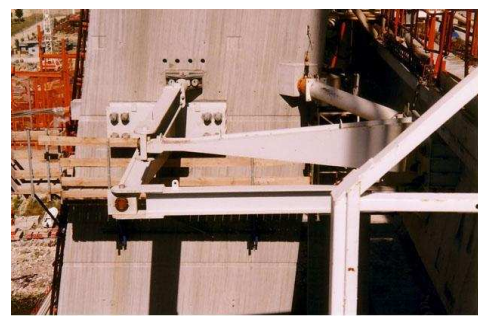


Figura 1.11: Amortecedores histeréticos[9]

Apesar de a norma NP EN 1998-1 não contemplar sistemas de controlo TMD, foi esta a solução implementada para reduzir as vibrações laterais e verticais da ponte pedonal Pedro e Inês (Figura 1.12), em Coimbra. Após a realização de alguns ensaios concluiu-se que a estrutura experimentava acelerações e deslocamentos laterais que ultrapassam os limites aceitáveis para garantir o conforto dos seus utentes.

A estrutura original tinha como características dinâmicas  $f = 0,83\text{Hz}$  e  $\xi = 0,55\%$ . Para atenuar as vibrações foram instalados 6 TMD a meio vão de modo reduzir os deslocamentos laterais da ponte. Com a presença dos dispositivos o sistema passou a ser caracterizado por dois modos de vibração de características  $f_1 = 0,79\text{Hz}$  e  $\xi_1 = 6,5\%$ , e  $f_2 = 0,88\text{Hz}$  e



$\xi_2 = 4,0\%$ . No entanto, o sistema teve uma perda de eficiência de 40% em relação ao que se esperava, tal facto deveu-se principalmente às diferentes características de amortecimento de cada TMD [19].



Figura 1.12: Vista geral da ponte Pedro e Inês

Nesta ponte foi também instalado um sistema de monitorização que possibilita uma observação via Web do comportamento dinâmico da ponte. A partir dos resultados experimentais, recolhidos durante 2 meses, foi possível verificar que as acelerações máximas (verticais e horizontais) não ultrapassaram os limites aceitáveis [19].

Recentemente foi desenvolvido um estudo sobre a implementação de um sistema de controlo activo com o objectivo de reduzir as vibrações de uma ponte pedonal (Figura 1.13), localizada no campus da Faculdade de Engenharia do Porto [6]. O sistema tinha como objectivo controlar os modos de vibração próximos da frequência de 2Hz que pode ser atingida por actividades dos utentes da ponte.



Figura 1.13: Vista geral da ponte, FEUP [6]

A estratégia de controlo activo passava por aumentar o amortecimento estrutural, por intermédio de dois AMD, utilizando a realimentação directa da velocidade. Esta metodologia pode ser comparada à introdução de amortecedores passivos numa estrutura (Figura 1.14), pois também gera uma força de amortecimento proporcional à velocidade [19].

O estudo permitiu observar o desempenho do sistema em alguns cenários de posicionamento do actuador. No caso particular do 4º modo de vibração, foi possível aumentar o coeficiente de amortecimento de 1.76% para 4.15%.

O trabalho realizado permitiu evidenciar as vantagens dos sistemas activos face aos sistemas passivos, pois o sistema AMD de 34kg produziu o mesmo efeito que um TMD passivo equivalente cuja massa teria de ascender aos 160kg [6].

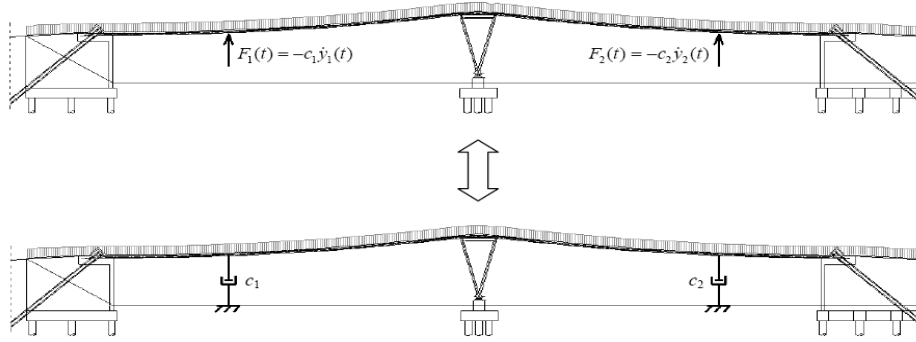


Figura 1.14: Efeito do controlo activo utilizando um controlador proporcional à velocidade [6]

## 1.5 Objectivos do trabalho

O objectivo deste trabalho consiste em estudar o funcionamento e o dimensionamento de um controlador activo capaz de reduzir as vibrações de uma estrutura flexível. A estrutura consiste num pórtico de dois pisos e o controlo das vibrações realiza-se através de um amortecedor de massa activo colocado no topo.

Para dimensionar o controlador estudam-se duas técnicas: alocação de pólos e regulador linear quadrático. Ambas as metodologias fazem parte da teoria de controlo moderno e utilizam a formulação de espaço de estados.

Outro dos objectivos deste trabalho passa por demonstrar o funcionamento e dimensionamento de um observador de estados.

Pretende-se também simular o comportamento do sistema dinâmico através de modelos desenvolvidos em MATLAB e SIMULINK. A simulação visa aferir a eficácia do controlador quando a estrutura é sujeita a uma acção sísmica.

## 1.6 Organização do trabalho

A primeira parte deste trabalho refere a problemática das vibrações em engenharia civil e revela diversos tipos de controlo existentes. A segunda parte é alusiva à modelação, análise e controlo de sistemas dinâmicos. A terceira parte inclui a simulação de um modelo laboratorial dotado de um AMD.

No primeiro capítulo são apresentados os problemas inerentes à ocorrência de vibrações excessivas em estruturas de engenharia civil. Neste capítulo faz-se também a descrição de alguns sistemas de controlo e são apresentadas algumas aplicações em estruturas reais.

O segundo capítulo trata da modelação e análise de sistemas dinâmicos, no qual se deduzem as equações do movimento de um pórtico de dois pisos dotado de um amortecedor de massa activo (AMD) no topo. Seguidamente abordam-se as representações de sistemas através de funções de transferência e espaço de estados. No fim do capítulo, deduzem-se as características dinâmicas do sistema a partir da sua representação em espaço de estados.

No capítulo três é feita uma introdução ao funcionamento de sistemas de controlo, onde se apresentam os diagramas de blocos, referindo a sua utilidade no dimensionamento de controladores.

O quarto capítulo apresenta duas técnicas de dimensionamento de controladores: alocação de pólos e LQR. Ambas as estratégias fazem parte da teoria de controlo moderno e permitem efectuar o dimensionamento no domínio do tempo.

No quinto capítulo realiza-se o dimensionamento do controlador onde se avalia a vibração livre da estrutura para diferentes parâmetros.

O sexto capítulo permite avaliar o comportamento da estrutura para a actuação de um sismo através de modelos desenvolvidos em MATLAB e SIMULINK. É feita a comparação dos resultados para a estrutura original, estrutura com dispositivo inactivo (amortecimento passivo) e o caso em que o AMD se encontra em funcionamento.

Finalmente, no capítulo sete são feitas as considerações finais sobre os temas desenvolvidos nesta dissertação.



## Capítulo 2

# Modelação e Análise do Sistema Dinâmico

No presente capítulo serão deduzidas, a partir do método de Lagrange, as equações do movimento que permitem representar o comportamento de sistemas dinâmicos. As equações do movimento da estrutura, em estudo, serão reescritas segundo a representação de espaço de estados. No fim do capítulo, demonstra-se como obter as características dinâmicas a partir da representação do sistema em espaço de estados.

### 2.1 Descrição do modelo laboratorial AMD-2

O sistema AMD-2 é um modelo à escala reduzida de um edifício controlado por um amortecedor de massa activo. A estrutura consiste num pórtico de dois andares sobre o qual se coloca um carro que se movimenta através de um mecanismo de cremalheira e pinhão. A estrutura, representada na Figura 2.1, é feita de aço e é flexível ao longo da sua fachada.

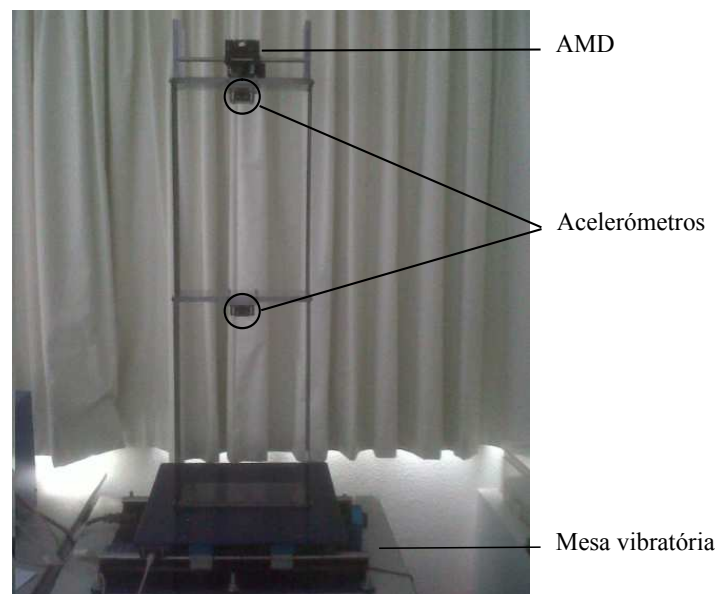


Figura 2.1: Modelo laboratorial AMD-2

No topo da estrutura acomoda-se uma engrenagem e um eixo criados para trabalhar com um carro do tipo IP02 que constitui a massa controlável do sistema. O carro é sólido de alumínio e é guiado por um motor de corrente contínua (DC), equipado com uma caixa de mudanças planetária. O dispositivo é livre para se mover na mesma direcção que a estrutura e desliza ao longo de um eixo de aço inoxidável usando rolamentos lineares. Quando o motor trabalha, o esforço de torção criado no eixo de saída é transformado em força linear (ou seja, força de controlo) através do mecanismo de cremalheira e pinhão, resultando no movimento do carro. A posição do carro é medida directamente usando um codificador cujo eixo se liga à via através de um pinhão adicional, enquanto que as acelerações dos pisos são registadas por acelerómetros [22].

## 2.2 Equações do movimento

Neste trabalho as equações do movimento determinam-se a partir do método de Lagrange. Este método pode ser aplicado para qualquer sistema dinâmico e baseia-se no princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T + \delta W dt = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\delta W$  não é o trabalho virtual total pois exclui o trabalho das forças de inércia. O princípio de Hamilton pode ser aplicado em sistemas conservativos e nesse caso  $\delta W = -\delta V$ .

Ao substituir  $\delta W$  na equação (2.1) resulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.2)$$

onde  $T$  representa a energia cinética do sistema e  $V$  a energia potencial. Introduzindo o conceito de Lagrangeano de um sistema

$$L = T - V \quad (2.3)$$

e substituindo na equação (2.2), resulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) indica que todos os movimentos que levam um sistema conservativo desde uma configuração inicial,  $X_1$ , para uma configuração final,  $X_2$ , num intervalo de tempo  $(t_1, t_2)$ , conduzem a um valor estacionário de  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  [15].

Na definição do princípio de *Hamilton* está implícito que o comportamento dinâmico do sistema será consistente com as limitações do mesmo. As coordenadas generalizadas tornam o campo de deslocamentos de uma estrutura cinematicamente admissível, descrevendo-o com o número mínimo de coordenadas independentes. Portanto, qualquer posição do sistema pode ser descrita como uma função das  $N$  coordenadas generalizadas [27].

$$T(q_k, \dot{q}_k, t); \quad V(q_k, \dot{q}_k, t); \quad L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

As equações de Lagrange para cada coordenada generalizada obtém-se a partir das equações de Euler para o integral  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  [15].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Para sistemas onde actuam forças não conservativas, como por exemplo as forças de atrito, as equações de Lagrange passam a ser dadas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = Q_k^{nc} \quad (2.6)$$

Onde  $Q_k^{nc}$  é a resultante das forças não conservativas aplicadas segundo a coordenada generalizada  $q_k$ .

### 2.2.1 Equações do movimento da estrutura sem AMD

Para analisar o comportamento da estrutura original é necessário obter as equações do movimento. Atendendo ao modelo da estrutura, representado na Figura 2.2, admite-se a coordenada generalizada  $x_{f_1}$ , correspondente ao deslocamento do piso 1, e a coordenada generalizada  $x_{f_2}$  que corresponde ao deslocamento relativo entre o piso 2 e o piso 1.

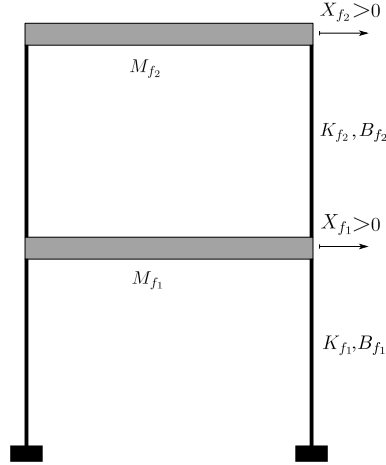


Figura 2.2: Modelo do pórtico de dois pisos sem AMD

A energia potencial está associada somente aos deslocamentos horizontais dos pisos, visto que se admitem pequenas oscilações angulares da estrutura. A rigidez lateral de ambos os pisos é modelada por molas de rigidez  $K_{f_1}$  e  $K_{f_2}$ , sendo a energia potencial total dada pela energia potencial elástica das molas.

$$V_{total} = \frac{1}{2} K_{f_1} x_{f_1}^2(t) + \frac{1}{2} K_{f_2} x_{f_2}^2(t) \quad (2.7)$$

A energia cinética está associada aos movimentos de translação dos pisos e depende das suas massas,  $M_{f_1}$  e  $M_{f_2}$ , e das velocidades  $\dot{x}_{f_1}$  e  $\dot{x}_{f_2}$ .

$$T_{t_{f_1}} = \frac{1}{2} M_{f_1} \dot{x}_{f_1}^2(t) \quad (2.8)$$

$$T_{t_{f_2}} = \frac{1}{2} M_{f_2} [\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)]^2 \quad (2.9)$$

Somando as equações (2.8) e (2.9) obtém-se a energia cinética total do sistema.

$$T_{total} = \frac{1}{2} M_{f_1} \dot{x}_{f_1}^2(t) + \frac{1}{2} M_{f_2} [\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)]^2 \quad (2.10)$$

Para dimensionar o sistema de controlo consideram-se nulos os coeficientes de amortecimento viscoso equivalentes,  $B_{f_1}$  e  $B_{f_2}$ . Tendo em conta que não existem forças não conservativas aplicadas, as equações do movimento obtém-se a partir da seguintes equações:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_1}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_1}} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_2}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_2}} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Resolvendo as equações (2.11) e (2.12) obtém-se as equações do movimento para cada coordenada generalizada do sistema

$$(M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + M_{f_2} \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_1} x_{f_1}(t) = 0 \quad (2.13)$$

$$M_{f_2} \ddot{x}_{f_1}(t) + M_{f_2} \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_2} x_{f_2}(t) = 0 \quad (2.14)$$

As equações (2.13) e (2.14) podem ser substituídas por uma única equação matricial da forma

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}(t) = 0 \quad (2.15)$$

sendo  $\mathbf{M}_s$  a matriz de massa,  $\mathbf{K}_s$  a matriz de rigidez e  $\mathbf{q}$  o vector das coordenadas generalizadas.

$$\begin{bmatrix} M_{f_1} + M_{f_2} & M_{f_2} \\ M_{f_2} & M_{f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{f_1}(t) \\ \ddot{x}_{f_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{f_1} & 0 \\ 0 & K_{f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f_1}(t) \\ x_{f_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.2.2 Equações do movimento do sistema com AMD

Considere-se o sistema AMD-2 representado na Figura 2.3, tendo em conta que o AMD se pode deslocar em relação ao segundo piso, as coordenadas generalizadas do sistema passam a ser  $x_c$ ,  $x_{f_1}$  e  $x_{f_2}$ .

A energia potencial está associada somente aos deslocamentos horizontais dos pisos e como tal não sofre alterações em relação à equação (2.7).

$$V_{total} = \frac{1}{2} K_{f_1} x_{f_1}^2(t) + \frac{1}{2} K_{f_2} x_{f_2}^2(t)$$

A energia cinética pode ser dividida em duas parcelas, uma de translação e outra de rotação associada ao motor. A parcela de translação depende das massas  $M_c$ ,  $M_{f_1}$ ,  $M_{f_2}$  e das respectivas velocidades absolutas em relação ao seu centro de gravidade. A energia de rotação do motor depende da velocidade do AMD e da sua inércia de rotação.

$$T_{r_c} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2(t)}{r_{mp}^2} \quad (2.17)$$

$$T_{t_c} = \frac{1}{2} M_c [\dot{x}_c(t) + \dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)]^2 \quad (2.18)$$



$$T_{t_{f_1}} = \frac{1}{2} M_{f_1} \dot{x}_{f_1}^2(t) \quad (2.19)$$

$$T_{t_{f_2}} = \frac{1}{2} M_{f_2} [\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)]^2 \quad (2.20)$$

Somando as equações (2.17-2.20) obtém-se a energia cinética total do sistema.

$$\begin{aligned} T_{total} = & \frac{1}{2} \left( M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) \dot{x}_c^2(t) + M_c [\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)] \dot{x}_c(t) + \\ & + \frac{1}{2} [M_c + M_{f_1} + M_{f_2}] \dot{x}_{f_1}^2(t) + (M_c + M_{f_2}) \dot{x}_{f_2}(t) \dot{x}_{f_1}(t) + \\ & + \frac{1}{2} (M_c + M_{f_2}) \dot{x}_{f_2}^2(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

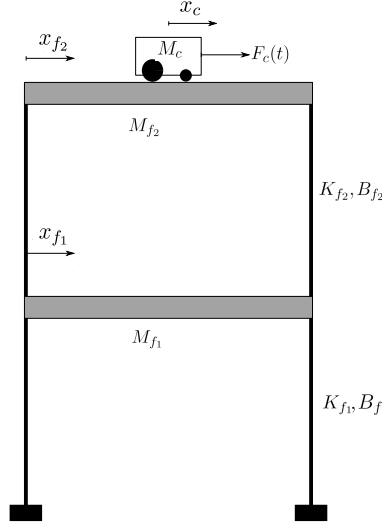


Figura 2.3: Modelo do pórtico do sistema AMD-2

Para obter as equações que regem o movimento da estrutura aplica-se a equação (2.6) a cada coordenada generalizada.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{x_c}^{nc} \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_1}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_1}} \right) = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_2}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_2}} \right) = 0 \quad (2.24)$$

As forças não conservativas aplicadas ao sistema dizem respeito à força de controlo aplicada ao AMD e à força de atrito que se gera quando o AMD se desloca ao longo do eixo.

$$Q_{x_c}^{nc}(t) = F_c(t) - B_{eq} \dot{x}_c(t) \quad (2.25)$$

O valor  $B_{eq}$  corresponde ao coeficiente de amortecimento viscoso equivalente verificado no pinhão do motor e  $F_c(t)$  equivale à força de controlo. Esta relaciona-se com a velocidade do AMD,  $\dot{x}_c$ , e com a diferença de potencial,  $V_m(t)$ , a aplicar ao motor.

$$F_c(t) = -\frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \dot{x}_c(t) + \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(t) \quad (2.26)$$

Ao resolver as equações (2.22-2.24) obtêm-se as equações do movimento do pórtico

$$\begin{aligned} \left( M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}_c(t) + M_c (\ddot{x}_{f_1}(t) + \ddot{x}_{f_2}(t)) + \left( B_{eq} + \frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \dot{x}_c(t) = \\ = \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_1} x_{f_1}(t) = 0 \quad (2.28)$$

$$M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_2} x_{f_2}(t) = 0 \quad (2.29)$$

A partir das equações (2.27-2.29) é possível reescrever as equações do movimento da forma matricial

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}(t) = \mathbf{J}_s V_m(t) + \mathbf{J}_{sismo} \ddot{x}_b(t) \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{C}_s$  é a matriz de amortecimento do sistema e  $\mathbf{J}_s$  o vector com os coeficientes que multiplicam pela diferença de potencial aplicada ao motor para atenuar as vibrações.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} \left( M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) & M_c & M_c \\ M_c & M_c + M_{f_1} + M_{f_2} & M_c + M_{f_2} \\ M_c & M_c + M_{f_2} & M_c + M_{f_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{f_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \left( B_{eq} + \frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A equação (2.30) permite concluir que ao colocar o AMD no topo da estrutura o amortecimento aumenta. Quando o sistema se encontra inactivo, o carro funciona como dispositivo passivo.

## 2.3 Espaço de Estados

As equações do movimento podem ser reescritas num sistema com mais equações diferenciais mas de grau inferior. Esta formulação é conhecida como Espaço de Estados.

Nesta formulação estão envolvidas três tipos de variáveis:

- *Variáveis de estado*  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  são o menor conjunto de variáveis independentes que conhecidos os seus valores para um instante inicial  $t = t_0$ , assim como os valores das entradas para  $t \geq t_0$ , possibilitam conhecer o comportamento do sistema num instante  $t \geq t_0$ .

- *Variáveis de entrada*  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  representam as acções exteriores impostas ao sistema.
- *Variáveis de saída*  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  relacionam-se com as variáveis de estado e de entrada. Por vezes não existe possibilidade de obter medições dos estados ou das entradas no sistema. Nestas situações as variáveis de saída retornam informação relativa ao comportamento do sistema.

O vector  $\mathbf{x}(t)$  constituído pelas  $n$  variáveis de estado é denominado vector de estado. O espaço  $n$ -dimensional cujos eixo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  estão em correspondência com as  $n$  variáveis de estado, denomina-se espaço de estados, em que cada estado do sistema pode ser representado apenas por um ponto.

O vector de entrada  $\mathbf{u}(t)$  é constituído pelas  $r$  variáveis de entrada e o vector de saída  $\mathbf{y}(t)$  é constituído pelas  $m$  variáveis de saída.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Todas as variáveis podem ser alocadas em vectores dando origem as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.34)$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo, as equações (2.33) e (2.34) não dependem do tempo e assim a representação em espaço de estados é dada pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (2.36)$$

A matriz  $\mathbf{A}[n \times n]$  é denominada matriz de estado,  $\mathbf{B}[n \times r]$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{C}[m \times n]$  é matriz de saída e  $\mathbf{D}[m \times r]$  a matriz de transmissão directa.

### 2.3.1 Solução das equações de estado

Quando uma estrutura é sujeita a acções externas o seu movimento traduz-se em equações diferenciais não homogéneas. De seguida será representada a solução para este tipo de equações na forma matricial.

Considere-se a equação diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (2.37)$$

Onde  $\mathbf{x}[n \times 1]$  e  $\mathbf{u}[r \times 1]$  são os vectores de estado e de entrada. Multiplicando, à esquerda, ambos os termos da equação por  $e^{-\mathbf{A}t}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] &= \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Onde  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$  descreve a resposta a uma condição inicial e  $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$  representa a resposta à entrada  $\mathbf{u}(t)$ .

### 2.3.2 Representação do sistema sem AMD em Espaço de Estados

O comportamento da estrutura pode ser determinado por intermédio das posições  $x_{f_1}$  e  $x_{f_2}$ , e das velocidades  $\dot{x}_{f_1}$  e  $\dot{x}_{f_2}$ . Como a ordem do sistema corresponde ao número de variáveis de estado, conclui-se que o sistema é de quarta ordem.

Ao analisar o movimento livre da estrutura, a matriz de entrada,  $\mathbf{B}$ , e a matriz de transmissão directa,  $\mathbf{D}$ , são nulas. A representação do sistema em espaço de estados é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Onde o vector de estado,  $\mathbf{x}(t)$ , inclui as coordenadas generalizadas e as suas primeiras derivadas.

$$\mathbf{x}(t) = [x_{f_1}(t) \quad x_{f_2}(t) \quad \dot{x}_{f_1}(t) \quad \dot{x}_{f_2}(t)]^T$$

O vector de saída,  $\mathbf{y}(t)$ , é constituído pelas variáveis medidas pelos sensores instalados na estrutura.

$$\mathbf{y}(t) = [\ddot{x}_{f_1}(t) \quad \ddot{x}_{f_2}(t)]^T$$

A representação do sistema segundo a formulação de espaço de estados obriga a que as equações do movimento sejam reescritas em relação à segunda derivada das coordenadas generalizadas. A partir da equação (2.15) é possível representar o movimento da estrutura em relação às variáveis  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{x}_{f_1}$  e  $\ddot{x}_{f_2}$ .

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s\mathbf{q}(t) \quad (2.38)$$

Atendendo à equação (2.38) a matriz de estado,  $\mathbf{A}$ , é preenchida da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Substituindo as grandezas envolvidas nas equações do movimento pelos seus respectivos valores, dispostos no Apêndice B, obtém-se a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -862.07 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que o vector de saída é composto pelas variáveis  $\ddot{x}_{f_1}$  e  $\ddot{x}_{f_2}$ , os valores que preenchem a matriz de saída,  $\mathbf{C}$ , são os seguintes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -862.07 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3.3 Representação do sistema AMD-2 em Espaço de Estados

A partir das equações (2.27 -2.29), conclui-se que o comportamento da estrutura pode ser determinado através do seguinte vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = [x_c(t) \quad x_{f_1}(t) \quad x_{f_2}(t) \quad \dot{x}_c(t) \quad \dot{x}_{f_1}(t) \quad \dot{x}_{f_2}(t)]^T$$

O vector de saída,  $\mathbf{y}(t)$ , é constituído pelas variáveis medidas pelos sensores instalados na estrutura.

$$\mathbf{y}(t) = [x_c(t) \quad \ddot{x}_{f_1}(t) \quad \ddot{x}_{f_2}(t)]^T$$

A única entrada do sistema é a diferença de potencial a aplicar ao motor do AMD.

$$\mathbf{u}(t) = V_m(t)$$

A representação do sistema sob a formulação de espaço de estados obriga a que as equações do movimento sejam reescritas em relação à segunda derivada das coordenadas generalizadas. A partir da equação (2.30) é possível representar o movimento da estrutura em relação às variáveis  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{x}_{f_1}$  e  $\ddot{x}_{f_2}$ .

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s\mathbf{q}(t) - \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C}_s\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{J}_s V_m(t) \quad (2.39)$$

Atendendo à equação (2.39), preenche-se a matriz de estado,  $\mathbf{A}$ , e a matriz de entrada,  $\mathbf{B}$  da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C}_s \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{J}_s \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.40)$$

Substituindo as grandezas envolvidas nas equações do movimento pelos seus respectivos valores, dispostos no Apêndice B, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.00 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que o vector de saída é composto pelas variáveis  $x_c$ ,  $\ddot{x}_{f1}$  e  $\ddot{x}_{f2}$ , os valores que preenchem a matriz de saída,  $\mathbf{C}$ , e a matriz de transmissão directa,  $\mathbf{D}$ , são os seguintes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Funções de Transferência

As funções de transferência são usadas para caracterizar a relação entre as entradas e as saídas de sistemas lineares invariantes no tempo, no domínio de Laplace.

Considere-se um sistema linear invariante no tempo definido pela equação diferencial

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (2.41)$$

onde  $y(t)$  é a saída do sistema e  $u(t)$  a entrada. A função de transferência  $G(s)$  é obtida através das transformadas de Laplace de ambos os membros da equação (2.41). Admitindo condições iniciais nulas obtém-se a seguinte equação:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.42)$$

Observa-se que a maior potência de  $s$ , presente no denominador da função de transferência, é igual à ordem do termo de maior derivada da saída do sistema. Ao analisar uma função de transferência conclui-se que a ordem do sistema é dada pela maior potência de  $s$  presente no denominador.

A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada com a saída. No entanto, não transmite informação sobre a estrutura física do sistema, sendo assim dois sistemas físicos diferentes podem ter funções de transferência idênticas[20].

Todos os números, reais ou complexos, que anulam o denominador da equação (2.42) são denominados pólos da função de transferência, e os números, reais ou complexos, que anulam o numerador são os zeros da função de transferência.

A função de transferência pode então ser representada da seguinte forma:

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (m < n) \quad (2.43)$$

em que  $K$  é uma constante,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e  $z_1, z_2, \dots, z_m$  são os pólos e os zeros da função de transferência.

A equação (2.42) representa um sistema linear com apenas uma entrada e uma saída, no entanto, para caracterizar o movimento da maioria das estruturas de engenharia civil é necessário representar sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

É possível relacionar cada par entrada-saída do sistema por funções de transferência, sendo todas elas alocadas numa única matriz.

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

A equação (2.44) representa um sistema com  $m$  saídas e  $r$  entradas, o que pode corresponder a uma estrutura com  $m$  graus de liberdade, disponíveis para medição, onde se aplicam  $r$  forças externas.

## 2.5 Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência

Considere-se um sistema representado em Espaço de Estados, dado pelas equações

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

Pretende-se obter a matriz de transferência  $G(s)$ , composta pelas funções de transferência que relacionam cada par entrada saída do sistema. Como tal, aplica-se a Transformada de Laplace às equações de estado e de saída.

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s) \quad (2.45)$$

Considerando as condições iniciais nulas,  $\mathbf{x}(0) = 0$ , obtém-se

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{A} \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

ou

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

Multiplicando à esquerda, ambos os termos da equação anterior, por  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \quad (2.46)$$

Substituindo a equação (2.46) na equação (2.45), resulta

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s)$$

Por definição, a matriz de transferência relaciona as Transformadas de Laplace do vector de entrada e do vector de saída de um sistema.

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.47)$$

Sabendo que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

e substituindo na equação (2.47), resulta

$$G(s) = \mathbf{C} \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \mathbf{D}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (2.48)$$

Observe-se o denominador da equação (2.48), dado por  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ . Os pólos do sistema obtêm-se igualando o denominador da função de transferência a zero:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (2.49)$$

Tendo por base as equações (2.48) e (2.49), conclui-se que os valores próprios da matriz de estado correspondem aos pólos da função de transferência.

## 2.6 Determinação das características físicas de um sistema linear

Esta secção tem como finalidade demonstrar a relação entre a posição dos pólos da função de transferência, no plano-complexo, e as características dinâmicas de uma estrutura.

### 2.6.1 Representação dos pólos e zeros no Diagrama de Argand

O Diagrama de Argand, também conhecido como plano-complexo, é um plano cartesiano onde as ordenadas e as abcissas representam, respectivamente, a parte imaginária e a parte real de um número complexo. A possibilidade de representar números complexos geometricamente, faz do Diagrama de Argand uma ferramenta útil no dimensionamento e análise de sistemas de controlo.

Seja  $z$  um número complexo expresso em coordenadas cartesianas na forma

$$z = A + Bj$$

a sua representação no Diagrama de Argand é demonstrada na Figura 2.4. Por convenção, a posição dos pólos da função de transferência é assinalada por uma cruz enquanto a posição dos zeros é representada por um círculo.

### 2.6.2 Análise de estabilidade de sistema lineares

A estabilidade é uma característica intrínseca dum sistema dinâmico, como tal não depende de perturbações externas. Para sistema lineares representados em espaço de estados, a estabilidade pode ser determinada a partir dos valores próprios da matriz de estado  $\mathbf{A}$ .

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Os valores próprios podem ser reais ou complexos. Sempre que um dos valores próprios de  $\mathbf{A}$  se situe no semi-plano complexo direito o sistema é instável, ou seja, quando sujeito a uma perturbação externa este não tem capacidade de regressar à posição de equilíbrio.

Um sistema diz-se estável no sentido assintótico se todos os valores próprios de  $\mathbf{A}$  tiverem parte real negativa. A resposta impulsiva, deste tipo de sistemas, converge sempre para zero. Caso existam valores próprios posicionados sob o eixo imaginário, e nenhum dos outros pertença ao semi-plano complexo direito, o sistema classifica-se como marginalmente estável [10].



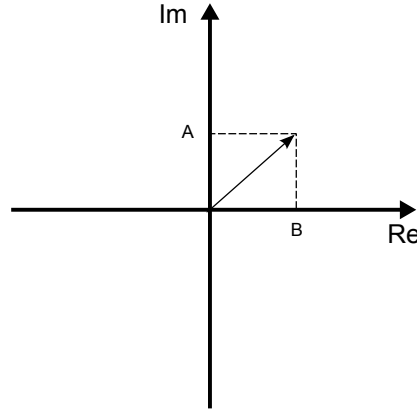


Figura 2.4: Diagrama de Argand

### 2.6.3 Significado físico da posição dos pólos

A posição dos pólos, no plano complexo, está directamente relacionada com as frequências próprias e o coeficiente de amortecimento de cada modo de vibração. Para estruturas com vários graus de liberdade, a equação que relaciona os valores dos pólos e as características dinâmicas do sistema é:

$$p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_{d,i} \quad (2.50)$$

onde  $j$  é a unidade imaginária ( $j^2 = -1$ ),  $\omega_i$  representa a frequência própria do modo de vibração,  $\omega_{d,i}$  a frequência amortecida e  $\xi_i$  o coeficiente de amortecimento. Como se pode ver na equação (2.50), a cada frequência natural está associado um par de pólos complexos conjugados.

Na Figura 2.5 está representado um par de pólos, a partir da sua posição é possível concluir a frequência natural do modo de vibração  $i$  medindo o raio da circunferência centrada na origem do referencial que passa por ambos os pólos, ou seja, calculando a norma do número complexo.

$$|p_i| = \sqrt{(-\xi_i \omega_i)^2 + (j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2})^2} = \sqrt{\xi_i^2 \omega_i^2 + \omega_i^2 (1 - \xi_i^2)} = \omega_i$$

O coeficiente de amortecimento de cada modo de vibração pode ser obtido a partir da seguinte relação

$$\cos \theta_i = \frac{\xi_i \omega_i}{\omega_i} = \xi_i$$

A posição do pólo permite obter o coeficiente de amortecimento,  $\xi_i$ , para isso basta calcular o cosseno do ângulo  $\theta_i$  medido desde a parte negativa do eixo real até à linha que une a origem com o pólo. A partir do diagrama de Argand é possível concluir que os modos de vibração são mais amortecidos, quanto mais próximos os respectivos pólos estiverem do eixo real. O oposto acontece quando os pólos estão próximos de eixo imaginário, onde o coeficiente de

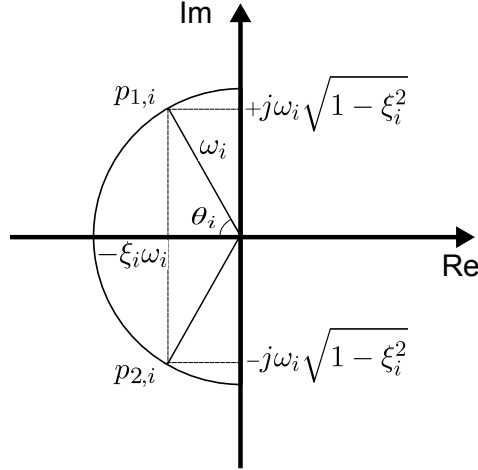


Figura 2.5: Representação de pólos no Diagrama de Argand

amortecimento se aproxima de zero. É interessante verificar que para pólos posicionados no semi-plano complexo direito o coeficiente de amortecimento é negativo, resultando num caso em que as respostas impulsivas são amplificadas em vez de amortecidas, conduzindo a uma situação de instabilidade.

## 2.7 Características dinâmicas da estrutura

Na presente secção analisam-se as características dinâmicas da estrutura original e demonstra-se o efeito da colocação do dispositivo de controlo no topo da estrutura.

### 2.7.1 Características dinâmicas da estrutura sem AMD

Tal como descrito na secção 2.6.3, as características dinâmicas podem ser obtidas a partir dos valores próprios da matriz de estado,  $\mathbf{A}$ .

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Para a estrutura original a matriz de estado, determinada na secção 2.3.2, é a seguinte:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -862.07 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o polinómio característico obtêm-se os seguintes pólos:

$$[12.8j \quad -12.8j \quad 33.6j \quad -33.6j]$$

A Tabela 2.1 permite observar as características dos modos de vibração, determinadas a partir dos pólos da função de transferência.

Tabela 2.1: Características dinâmicas da estrutura sem AMD

modo de vibração	frequências	amortecimento
1º Modo	12.8 rad/s	0
2º Modo	33.6 rad/s	0

Para efeitos de dimensionamento do controlador, admitem-se nulos os coeficientes de amortecimento dos pisos,  $B_{f_1}$  e  $B_{f_2}$ . O facto de existir algum atrito nas ligações dos pisos, confere algum amortecimento à estrutura, porém o seu valor é baixo quando comparado com os valores que se obtêm com o sistema de controlo activo.

Os coeficientes de amortecimento,  $B_{f_1}$  e  $B_{f_2}$ , são impossíveis de se obter a partir das dimensões da estrutura. Geralmente, o amortecimento é especificado pelos valores dos coeficientes de amortecimento dos modos de vibração que podem ser obtidos experimentalmente ou através de valores medidos para estruturas semelhantes [5].

A matriz de amortecimento de estruturas com amortecimento clássico pode ser construída através do método do amortecimento de Rayleigh. Este método assume que a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa e à matriz de rigidez da estrutura.

$$\mathbf{C}_s = a_0 \mathbf{M}_s + a_1 \mathbf{K}_s \quad (2.51)$$

Os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  determinam-se a partir das frequências próprias da estrutura ( $\omega_i, \omega_j$ ) e dos coeficientes de amortecimento ( $\xi_i, \xi_j$ ) admitidos para os modos de vibração considerados.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

### 2.7.2 Características dinâmicas da estrutura com AMD inactivo

A matriz dinâmica,  $\mathbf{A}$ , considerada para o caso em que a estrutura é dotada do AMD no seu topo é dada seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o polinómio característico obtêm-se os seguintes valores:

$$[0 \quad -0.67 + 10.7j \quad -0.67 - 10.7j \quad -16.5 \quad -0.405 + 32.3j \quad -0.405 - 32.3j]$$

Observa-se que existem dois pares de pólos complexos conjugados que correspondem aos dois modos de vibração da estrutura. Como a estrutura passa a ter amortecimento, estes pólos possuem parte real negativa. Os restantes pólos são reais e representam modos associados ao AMD. O pólo posicionado na origem do plano-complexo indica que ao aplicar-se uma perturbação ao AMD ele desloca-se sem retornar à posição inicial.

A Tabela 2.2 apresenta as frequências próprias e os coeficientes de amortecimento associados aos modos de vibração da estrutura.

Tabela 2.2: Características dinâmicas da estrutura com AMD inactivo

modo de vibração	frequências	amortecimento
1º Modo	$10.7 \text{ rad/s}$	6.24%
2º Modo	$32.3 \text{ rad/s}$	1.25%

A resposta da estrutura, a acções externas, deverá ser pouco amortecida e oscilatória, dado que os modos de vibração adquirem coeficientes de amortecimento baixos. O dimensionamento dos controladores, utilizando o AMD, terá como objectivo aumentar o amortecimento da estrutura.

## Capítulo 3

# Modelação e Análise de Sistemas de Controlo

### 3.1 Introdução

O presente capítulo aborda os sistemas de controlo e pretende servir de apoio à compreensão do seu funcionamento. Será apresentada a representação destes sistemas por intermédio de diagramas de blocos. Estes são úteis para compreender a interacção dos diversos componentes e permitem uma visão ampla dos vários tipos de sistemas.

### 3.2 Tipos de sistemas de controlo

No âmbito deste trabalho será analisado o funcionamento de sistemas de controlo em malha aberta e em malha fechada.

#### 3.2.1 Sistemas de controlo em malha aberta

Um sistema de controlo em malha aberta tem como objectivo aproximar o sinal de saída a um valor de referência. Tal como demonstra o esquema da Figura 3.1, a acção de controlo não é condicionada pelas medições das respostas ao longo do tempo. Estes sistemas requerem boa calibração para produzirem um bom desempenho [20].

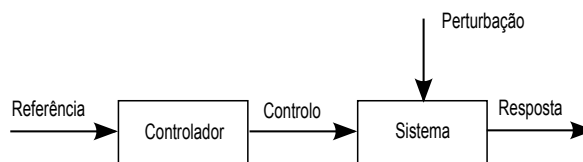


Figura 3.1: Esquema de um sistema de controlo em malha aberta

#### 3.2.2 Sistemas de controlo em malha fechada

Num sistema de controlo em malha fechada as respostas são utilizadas para obter a acção de controlo. O sistema é realimentado pelo sinal de saída ou uma função deste que é comparado

a um valor de referência (Figura 3.2). Enquanto estes valores diferirem o sistema de controlo actua de modo a anular essa diferença [20].

Estes sistemas são denominados como realimentados, podendo a realimentação ser positiva ou negativa. Para estruturas de engenharia civil o objectivo será limitar os deslocamentos, velocidades e acelerações, tratando-se de um caso de realimentação negativa.

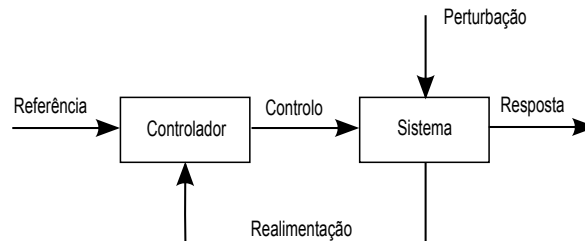


Figura 3.2: Esquema de um sistema de controlo em malha fechada

### 3.2.3 Comparação entre tipos de sistemas de controlo

Quando o sistema é inicialmente estável e as perturbações externas ao sistema são conhecidas, é aconselhável a utilização de um sistema de controlo em malha aberta. A actuação de um sistema de controlo passivo de vibrações é um exemplo deste tipo de controlo [8].

Num sistema em malha fechada o uso da realimentação melhora a resposta do sistema pois tem em conta distúrbios externos, variações internas dos parâmetros do sistema e as não-linearidades existentes [19]. Os sistemas de controlo activo de estruturas são um exemplo de sistemas realimentados, sendo que estes actuam sempre que os sensores detectam uma variação na saída. No entanto, estes sistemas requerem tecnologia superior e são mais difíceis de estabilizar.

## 3.3 Diagramas de Blocos

Neste tipo de diagramas os sinais representam as variáveis do sistema, sendo o seu fluxo representado por setas. Os blocos simbolizam as operações matemáticas que transformam o sinal de entrada, produzindo um sinal de saída. Em teoria de controlo, o valor de um bloco também é conhecido como ganho do bloco.

Esta representação pode ser usada para sistemas dinâmicos representados por funções de transferência, no domínio de Laplace, ou na formulação de espaço de estados, no domínio do tempo.

Um diagrama de blocos não contém informação relativa à construção física do sistema, logo dois sistemas completamente diferentes podem ser representados pelo mesmo diagrama de blocos.

### 3.3.1 Sistemas representados por funções de transferência

O diagrama de blocos representa as operações matemáticas que são efectuadas às variáveis do sistema, como tal para desenhar convenientemente o diagrama será necessário obter as equações que descrevem o comportamento de cada componente. De seguida serão demonstradas algumas operações e propriedades dos diagramas de blocos para sistemas com uma entrada e uma saída, representados por funções de transferência, no domínio de Laplace.

Considere-se um sistema representado pela função de transferência  $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Leftrightarrow X(s)G(s) = Y(s) \quad (3.1)$$

O diagrama de blocos equivalente é o disposto na Figura 3.3, onde se observa que o sinal de saída resulta da multiplicação do sinal de entrada pela função de transferência do bloco.

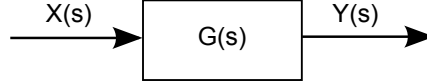


Figura 3.3: Esquema de um bloco

Considere-se o caso em que o sistema é dotado de uma acção de controlo em malha-aberta.

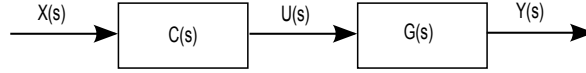


Figura 3.4: Diagrama de blocos de um sistema de controlo em malha-aberta

O sinal  $U(s)$  é dado pelo produto  $X(s)C(s)$ . Sabendo que  $Y(s) = U(s)G(s)$ , a equação que relaciona a entrada  $X(s)$  com a saída  $Y(s)$  é:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = C(s)G(s) \quad (3.2)$$

e o esquema reduz-se apenas a um bloco, cujo ganho é dado pelo produto da função de transferência do controlador e do sistema inicial.

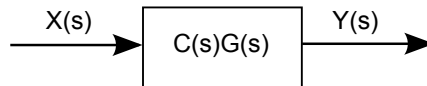


Figura 3.5: Bloco equivalente a duas funções de transferência em série

Um sistema constituído por  $n$  funções de transferência em série pode ser substituído por uma função de transferência, obtida pelo produto das  $n$  funções iniciais.

Como foi descrito na secção 3.2.2, se o sistema de controlo for em malha-fechada, as medições do sinal de saída são comparadas a um sinal de referência.

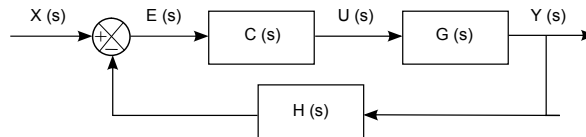


Figura 3.6: Diagrama de blocos de sistema de controlo em malha-fechada

Existem sistemas em que o valor de referência  $X(s)$  não tem as mesmas unidades do valor à saída  $Y(s)$ . O bloco cujo ganho é  $H(s)$  permite efectuar as conversões necessárias de modo a comparar ambos os valores. Se as grandezas físicas forem semelhantes, a função de transferência  $H(s)$  é igual a uma constante, como é exemplo a conversão de metros para milímetros.

Como se pode verificar na Figura 3.6, um sistema realimentado necessita de um detector de erro, este produz um sinal que traduz a diferença entre a referência e uma função do valor medido à saída do sistema. A operação de soma é representada por um círculo com uma cruz, os símbolos mais ou menos indicam uma adição ou subtracção.

Para que o sinal de saída seja usado na realimentação é necessário introduzir um ponto de ramificação. Os pontos de ramificação permitem que os sinais se dirijam para vários blocos em simultâneo.

Um sistema de controlo em malha fechada também pode ser substituído por apenas um bloco, que relaciona a variável de entrada com a de saída. Apresentam-se as relações entre os sinais do sistema:

$$\begin{aligned} U(s)G(s) &= Y(s) \\ E(s)C(s)G(s) &= Y(s) \\ [X(s) - Y(s)H(s)]C(s)G(s) &= Y(s) \\ X(s)C(s)G(s) &= Y(s)[1 + H(s)C(s)G(s)] \end{aligned}$$

A função de transferência de um sistema de controlo em malha-fechada com retroacção negativa é da forma

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} \quad (3.3)$$

o diagrama de blocos equivalente está representado na Figura 3.7.

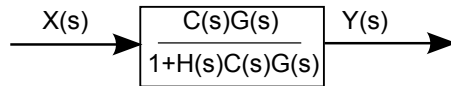


Figura 3.7: Bloco equivalente a sistema realimentado com retroacção negativa

As operações de integração e derivação podem ser representadas por diagramas de blocos. Considere-se o caso em que  $y(t) = \int f(\tau)d\tau$ , ao aplicar a transformada de Laplace a ambos os termos da equação resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{s}F(s) \quad (3.4)$$

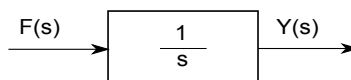


Figura 3.8: Bloco equivalente à operação de integração



Para o caso em que  $y(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ , a transformada de Laplace é

$$Y(s) = sF(s) \quad (3.5)$$

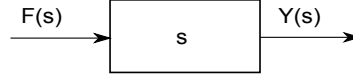


Figura 3.9: Bloco equivalente à operação de derivação

As Figuras 3.8 e 3.9 representam os blocos equivalentes às operação de integração e derivação, no domínio de Laplace.

### 3.3.2 Sistemas representados em espaço de estados

No âmbito deste trabalho será necessário compreender os diagramas de blocos de sistemas representados sob a formulação de espaço de estados. Desta feita as variáveis e as operações envolvidas estão no domínio do tempo, e os sistemas a controlar têm múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Considere-se um sistema dinâmico representado sob a forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

o respectivo diagrama de blocos está representado na Figura 3.10.

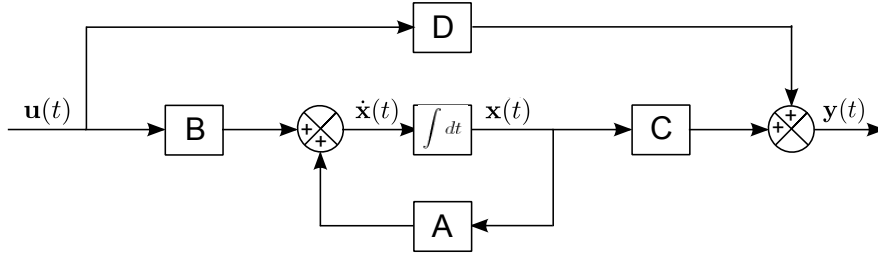


Figura 3.10: Diagrama de blocos de um sistema representado em espaço de estados

Observe-se que as setas representam os fluxos de sinais, que equivalem a vectores como os de estado,  $\mathbf{x}(t)$ , entrada,  $\mathbf{u}(t)$  e saída,  $\mathbf{y}(t)$ . Os ganhos dos blocos são iguais às matrizes de estado,  $\mathbf{A}$ , entrada,  $\mathbf{B}$ , saída,  $\mathbf{C}$  e de transmissão directa,  $\mathbf{D}$ .

O sistema de controlo em malha-fechada, em espaço de estados, pode ser feito a partir da realimentação linear das variáveis de estado, desde que estas sejam medíveis ou possíveis de estimar.

O diagrama de blocos de um sistema com realimentação de estados é demonstrado na Figura 3.11, onde  $\mathbf{K}$  equivale à matriz de ganho do controlador, sendo que o sinal de menos indica uma retroacção negativa.

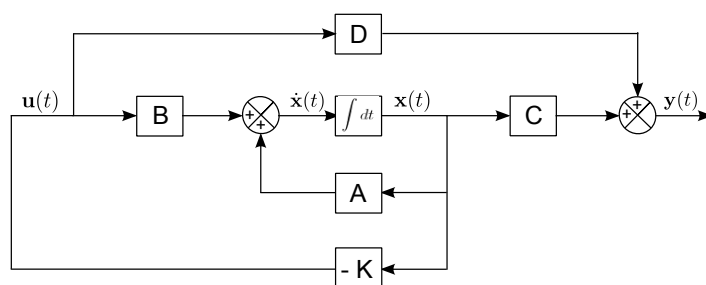


Figura 3.11: Diagrama de blocos de um sistema controlado via realimentação de estados

## Capítulo 4

# Dimensionamento de controladores

Técnicas de controlo clássico, como é exemplo o método do lugar de raízes, foram desenvolvidas para operar em sistemas caracterizados por funções de transferência. Permitem obter bons resultados no dimensionamento de controladores para sistemas com uma entrada e uma saída. Porém, tais técnicas revelam-se menos eficientes quando se pretende actuar sobre vários modos de vibração de uma estrutura [20].

A teoria de controlo moderno tem sido desenvolvida para resolver sistemas complexos, com múltiplas entradas e múltiplas saídas, nos quais se podem incluir a maioria das estruturas de engenharia civil. O dimensionamento de controladores, aplicando técnicas do controlo moderno, apoia-se em ferramentas de cálculo automático que permitem resolver sistemas representados na formulação de espaço de estados.

No âmbito deste trabalho serão abordadas duas estratégias de controlo de vibrações, ambas desenvolvidas a partir da teoria de controlo moderno. O primeiro método a ser abordado será o da alocação de pólos que permite alterar as características dos modos de vibração de uma dada estrutura. As teorias de controlo óptimo visam melhorar o comportamento de sistemas dinâmicos, tendo em conta o gasto de energia associado à acção de controlo. O presente capítulo pretende demonstrar os passos necessários para dimensionar um controlador a partir de um regulador linear quadrático.

### 4.1 Noção de Controlabilidade

Um sistema diz-se controlável se, por intermédio de uma acção de controlo,  $\mathbf{u}(t)$ , não restringida, for possível transferi-lo de um estado inicial,  $\mathbf{x}(t_0)$ , para um outro estado final,  $\mathbf{x}(t_f)$ , num intervalo finito de tempo [30].

Existe a possibilidade de um sistema não ser completamente controlável, tal acontece quando a acção de controlo não consegue transferir todos os estados. Para estruturas de engenharia civil, o facto de um sistema não ser completamente controlável, significa que existem modos de vibração impossíveis de alterar.

Um controlador, que não intervenha em todos os modos de vibração, pode ser utilizado desde que os modos em causa não intervenham significativamente na dinâmica da estrutura [19]. Para que todos os estados sejam afectados pela acção de controlo,  $\mathbf{u}(t)$ , terá de se alterar a posição do actuador, dado que a matriz de controlabilidade,  $\mathbf{W}$ , depende da composição da matriz de entrada,  $\mathbf{B}$ , e da matriz de estado,  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{W} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.1)$$

Um sistema é completamente controlável se a matriz,  $\mathbf{W}$ , tiver característica  $n$ , ou seja, se tiver  $n$  linhas ou colunas linearmente independentes [20].

## 4.2 Noção de Observabilidade

A observabilidade é a propriedade que permite determinar qualquer estado inicial,  $\mathbf{x}(t_0)$ , a partir das medições efectuadas ao sinal de saída,  $\mathbf{y}(t)$ , durante um intervalo de tempo finito. Quando for possível estimar todos os estados de um sistema dinâmico, este designa-se como completamente observável. Existem casos em que algumas variáveis de estado não afectam os valores do vector de saída, ou seja, existe falta de observabilidade. Na prática a falta de observabilidade significa que alguns modos de vibração não são detectados por observação das variáveis de saída.

A determinação da observabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo é feita a partir da matriz de observabilidade,  $\mathbf{N}$ . Sendo esta dependente das matrizes de estado  $\mathbf{A}$  e de saída  $\mathbf{C}$ .

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \quad (4.2)$$

Um sistema representado pela formulação de espaço de estados é completamente observável se e só se a matriz de observabilidade,  $\mathbf{N}[n \times nm]$ , tiver característica  $n$ .

## 4.3 Método da alocação de pólos

O presente método é usado para sistemas representados em espaço de estados e possibilita a alteração da posição dos pólos da função de transferência. Desta forma, os modos de vibração da estrutura adquirem novas frequências próprias e novos coeficientes de amortecimento para que o sistema tenha um determinado comportamento.

Considere-se um sistema representado pelas equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (4.4)$$

Os pólos da função de transferência determinam-se igualando o polinómio característico a zero

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

A acção de controlo é realizada a partir do vector de entrada,  $\mathbf{u}(t)$ , sendo o sistema realimentado pelo vector de estado:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

onde  $\mathbf{K}$  representa a matriz de ganho do controlador e  $\mathbf{x}(t)$  o vector de estado. No âmbito deste trabalho apenas se analisa o caso em que existe uma única acção de controlo, desta forma  $\mathbf{K}$  será um vector com apenas uma linha e  $n$  colunas equivalentes ao número de estados.

$$\mathbf{u}(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Reescrevendo a equação de estado (4.3) obtêm-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}(t) \quad (4.6)$$

Observe-se que a acção de controlo modifica a matriz de estado, o problema da alocação de pólos passa por encontrar o vector de ganho,  $\mathbf{K}$ , de modo a que os valores próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  sejam os pretendidos.

O método da alocação de pólos é bem sucedido se todas as variáveis de estado forem mensuráveis e disponíveis para a retroacção. Contudo, poderão existir variáveis de estado cujos valores não são medidos, sendo necessária a existência de um observador de estados que estime os seus valores.

O método da alocação de pólos pode ser utilizado se o sistema for controlável e observável [20].

#### 4.3.1 Determinação da matriz de ganho do controlador

Assumindo que o sistema é controlável e observável será possível determinar a matriz de ganho de modo a colocar os pólos da função de transferência em posições pré-definidas.

Recorrendo à equação (2.50) determinam-se as posições pretendidas para os pólos tendo em conta as frequências próprias,  $\omega_i$ , e os factores de amortecimento,  $\xi_i$ , que os modos de vibração deverão adquirir.

$$p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

Tendo em conta a equação de estado afectada pela acção de controlo  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}(t) \quad (4.7)$$

e sabendo que os valores próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  obtêm-se a partir das raízes do polinómio característico

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = 0 \Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (4.8)$$

impõe-se a igualdade entre os valores próprios da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  e os pólos obtidos pela equação (2.50).

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (4.9)$$

Para determinar os valores  $k_1, k_2, \dots, k_n$  que compõem a matriz de ganho  $\mathbf{K}$  basta igualar os coeficientes, que multiplicam iguais potências de  $s$ .

### 4.3.2 Utilização da fórmula de Ackerman

A fórmula de Ackerman permite obter a matriz de ganho do controlador a partir dos pólos pretendidos para o sistema, da matriz de estado  $\mathbf{A}$  e da matriz de controlabilidade  $\mathbf{W}$ .

Após escolher os pólos,  $p_i$ , a partir das características dinâmicas pretendidas determina-se o seguinte polinómio:

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (4.10)$$

A matriz de ganho do controlador de um sistema de ordem  $n$  é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \mathbf{W}^{-1} \beta(\mathbf{A}) \quad (4.11)$$

Onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de controlabilidade e  $\beta(\mathbf{A})$  é uma matriz dada pela equação

$$\beta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I}$$

em que os coeficientes  $a_i$  são os obtidos pela equação (4.10).

## 4.4 Regulador linear quadrático (LQR)

Ao aplicar o método da alocação de pólos, não é conhecido *à priori* o esforço de controlo necessário para que a estrutura tenha o comportamento desejado. Qualquer actuador apresenta limites a partir dos quais ocorre a saturação do sinal de controlo. Quando tal acontece existe uma quebra na malha de retroacção e o desempenho do controlador fica comprometido dado que os valores dos estados diferem daqueles que se obteriam sem saturação [3]. A saturação do sinal de controlo leva a aplicação de forças inapropriadas que podem instabilizar o sistema dinâmico.

A teoria de controlo óptimo demonstra uma alternativa, produzindo sistemas de controlo menos dispendiosos, tendo em conta os objectivos a alcançar.

O problema de controlo óptimo é formulado para sistemas lineares invariantes no tempo, representados em espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.12)$$

onde a acção de controlo é dada pela seguinte equação

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (4.13)$$

O método de controlo LQR tem como objectivo escolher o vector de entrada  $\mathbf{u}(t)$  que minimize uma função objectivo, correspondente ao seguinte integral:

$$J = \int_0^\infty L(x, u) dt$$

onde  $L(x, u)$  é uma função quadrática ou a função Hermitiana de  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$ .

Os elementos da matriz de ganho,  $\mathbf{K}$ , serão determinados com base na minimização da função  $J$ . Considere-se o problema que consiste em determinar o vector de entrada óptimo,  $\mathbf{u}(t)$ , para um sistema descrito pela equação (4.12), em que  $J$  é dado por

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4.14)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz Hermitiana semi-definida positiva, definida positiva ou uma matriz real simétrica, e  $\mathbf{R}$  uma matriz Hermitiana definida positiva ou uma matriz real simétrica.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) &\geq 0 \\ \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) &> 0\end{aligned}$$

Note-se que o termo  $\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)$  da equação (4.14) tem em conta o gasto de energia do sinal de controlo e  $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$  relaciona-se com a penalização do erro entre os estados medidos e as respectivas referências que no presente caso valem zero.

A determinação das matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  não é trivial. Geralmente, são escolhidas matrizes diagonais para facilitar o ajuste dos pesos de cada estado e da acção de controlo. Desta forma, a função objectivo,  $J$ , passa a ser dada da seguinte forma:

$$J = \int_0^\infty [x_1^2(t)q_{11} + x_2^2(t)q_{22} + \dots + x_n^2(t)q_{nn} + u_1^2(t)r_{11} + \dots + u_m^2(t)r_{mm}]dt \quad (4.15)$$

Os valores da diagonal principal das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  indicam a importância relativa do erro e do gasto de energia. Tome-se por exemplo o caso em que  $\mathbf{Q} = 0.01\mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , tal significa que é 100 vezes mais importante minimizar a energia dispendida no controlo do que minimizar a diferença entre a resposta e a referência.

A metodologia proposta por Bryson [12] permite determinar os pesos que compõem as diagonais principais das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . A regra de Bryson escala os termos do índice  $J$  para que no máximo sejam iguais a um. As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são obtidas a partir dos valores máximos admissíveis para cada variável de estado e de entrada.

$$q_{ii} = \frac{1}{(x_{i,\text{máx}})^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.16)$$

$$r_{ii} = \frac{1}{(u_{i,\text{máx}})^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (4.17)$$

Aplicando esta metodologia é possível atingir resultados próximos dos pretendidos, no entanto deve seguir-se um processo iterativo que melhore o comportamento do sistema, dado que a regra de Bryson é apenas um ponto de partida.

Um estudo recente relaciona as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  com a frequência própria e o coeficiente de amortecimento. O objectivo passa por determinar os quocientes  $q_{ii}/r_{ii}$  que proporcionam ao sistema um determinado comportamento. Este tipo de abordagem pretende ser uma alternativa ao processo iterativo que normalmente se utiliza. No entanto, apenas se estudou um sistema com um grau de liberdade [17].

#### 4.4.1 Determinação da matriz de ganho do controlador

A matriz de ganho  $\mathbf{K}$  determina-se por intermédio da equação reduzida de Riccati [18].

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.18)$$

Se a matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  tiver todos os pólos no semi-plano complexo esquerdo o sistema é estável e existirá sempre uma matriz positiva definida,  $\mathbf{P}$ , que satisfaça a equação (4.18). [20]

A matriz de ganho do controlador,  $\mathbf{K}$ , obtém-se substituindo a matriz  $\mathbf{P}$  na seguinte equação:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de ponderação relativa ao esforço de controlo e  $\mathbf{B}$  a matriz de entrada do sistema. Pela substituição de  $\mathbf{K}$  na equação (4.13) obtém-se o vector de entrada que minimiza a função objectivo  $J$ .

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (4.20)$$

Os detalhes da obtenção da matriz de ganho do controlador,  $\mathbf{K}$ , são apresentados no Apêndice C.

### 4.5 Observadores de estado

Uma estrutura de engenharia civil tem vários graus de liberdade e como tal é difícil garantir a medição de todas as variáveis de estado. O dimensionamento de observadores de estado permite estimar os valores de cada estado, a partir da medição das saídas, num intervalo finito de tempo. No âmbito deste trabalho demonstrar-se-á apenas como projectar observadores de ordem completa, ou seja, aqueles em que todas as variáveis de estado são estimadas.

Considere-se um sistema linear invariante no tempo, descrito pelas seguintes equações

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.22)$$

As equações que descrevem a dinâmica de um observador de ordem completa são dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o(t)) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{y}_o(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_o(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.24)$$

onde o vector de estado estimado  $\mathbf{x}_o(t)$  é a saída do observador, enquanto que as entradas são os vectores de entrada,  $\mathbf{u}(t)$ , e de saída,  $\mathbf{y}(t)$ , do sistema. A equação (4.23) apresenta um termo correctivo  $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o(t)$ , correspondendo à diferença entre as saídas do sistema e as saídas estimadas. A matriz de ganho do observador,  $\mathbf{G}$ , introduz um factor de peso ao termo de correcção [20].

Observa-se que as equações (4.23) e (4.24) são dependentes das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  do sistema, e que conhecendo as suas saídas,  $\mathbf{y}(t)$ , e as solicitações exteriores é possível obter uma estimativa do estado do sistema,  $\mathbf{x}_o(t)$ .

#### 4.5.1 Determinação da matriz de ganho do observador

Defina-se o vector da estimativa do erro como sendo

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o(t) \quad (4.25)$$

Com base nas equações (4.21 - 4.24) determina-se a equação que traduz a dinâmica da estimativa do erro.

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (4.26)$$

Pretende-se que dado um erro inicial,  $\mathbf{e}(0)$ , este convirja rapidamente para zero, ou seja, que a estimativa,  $\mathbf{x}_o(t)$ , se aproxime do vector de estado,  $\mathbf{x}(t)$ . Tal acontece se os valores



próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$  se encontrarem no semi-plano complexo esquerdo, sendo a dinâmica do erro assintoticamente estável.

Quando um sistema é observável, existirá sempre uma matriz  $\mathbf{G}$  que faça com que  $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$  seja estável [20]. A dinâmica do observador deverá ser mais rápida que a do sistema para que o controlador se baseie em valores fiáveis das variáveis de estado. A dinâmica pretendida para o observador é conseguida se os valores próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$  se colocarem à esquerda dos valores próprios de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ , no plano-complexo.

A matriz de ganho do observador,  $\mathbf{G}$ , pode ser obtida da mesma forma que se obtém a matriz de ganho do controlador,  $\mathbf{K}$ . Escolhendo previamente os pólos pretendidos para o observador ( $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$ ) e impondo a igualdade entre estes e os valores próprios da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ .

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})| = (s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \cdots (s - \hat{\lambda}_n) \quad (4.27)$$

#### 4.5.2 Influência do observador na malha de retroacção de estados

Os sistemas cuja realimentação é feita a partir dos estados estimados,  $\mathbf{x}_o(t)$ , passam a ter duas etapas de dimensionamento. A primeira termina com a obtenção da matriz de ganho do controlador,  $\mathbf{K}$ , e a segunda com a determinação da matriz de ganho do observador  $\mathbf{G}$ . Esta secção demonstrará os efeitos da adição de um observador de estados na malha de retroacção.

Considere-se um sistema regido pelas equações

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

e a acção de controlo efectua-se por intermédio da retroacção de estados estimados pelo observador

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}_o(t) \quad (4.28)$$

A equação de estado é então descrita da forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) - \mathbf{BKx}_o(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o(t)) \quad (4.29)$$

Tendo em conta a definição de erro dada na equação (4.25)

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o(t)$$

e substituindo na equação (4.29), resulta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) - \mathbf{BKx}_o(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BKe}(t) \quad (4.30)$$

Combinando as equações (4.26) e (4.30), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

A equação (4.31) descreve a dinâmica de um sistema com realimentação de estados estimados por um observador. Se um sistema em malha aberta for de ordem  $n$ , então o sistema controlado

(dotado de um observador de ordem completa) será de ordem  $2n$ . A equação característica do sistema completo é dada por

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

ou

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = 0 \quad (4.33)$$

A partir da equação (4.33) é possível verificar que o dimensionamento do controlador é feito independentemente do dimensionamento do observador. No entanto, existe uma regra que indica que a escolha do observador deve garantir que a resposta deste deve ser duas a cinco vezes mais rápida que a resposta do sistema a controlar [20].

A Figura 4.1 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controlo descrito pela equação (4.31).

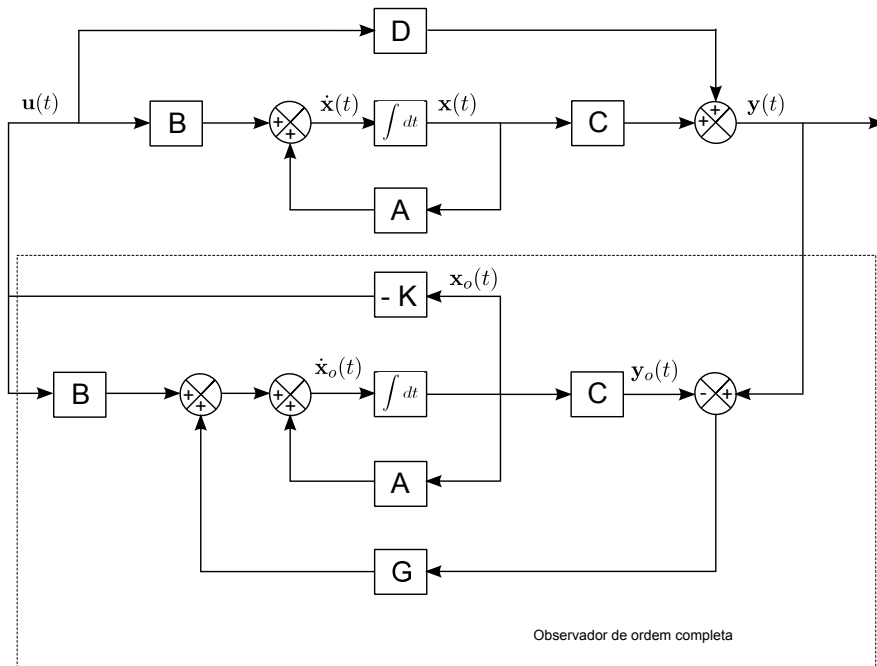


Figura 4.1: Diagrama de blocos de um sistema de controlo com observador de estados

## Capítulo 5

# Dimensionamento do sistema de controlo

No presente capítulo realiza-se o dimensionamento do controlador que permitirá atenuar as vibrações da estrutura. A primeira metodologia a ser empregue será a alocação de pólos onde se alteram directamente as características dinâmicas da estrutura. De seguida, demonstra-se o dimensionamento segundo a metodologia LQR onde se variam as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  para que o sistema estrutural adquira o comportamento desejado. Neste capítulo procede-se ao dimensionamento do observador de estados de ordem completa através da técnica da alocação de pólos.

### 5.1 Dimensionamento de Controladores

O controlador foi dimensionado com base em especificações dinâmicas que permitem caracterizar quantitativamente a resposta da estrutura. As especificações dizem respeito ao tempo de estabelecimento dos pisos,  $t_s$ , quando se impõem deslocamentos iniciais. O deslocamento inicial considerado para o primeiro piso foi de um centímetro, enquanto que o segundo piso é deslocado dois centímetros em relação à sua posição de equilíbrio o que corresponde ao seguinte vector de estado inicial:

$$\mathbf{x}(0) = [0 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

O tempo de estabelecimento é o intervalo de tempo compreendido entre o instante inicial e o instante em que a resposta não ultrapassa um valor específico em torno da posição de equilíbrio. A Tabela 5.1 indica as especificações associadas a cada piso.

Tabela 5.1: Especificações dinâmicas

	$t_s$	$ x_{f_i} $
1º piso	1.5 s	3.0 mm
2º piso	1.5 s	2.5 mm

Para avaliar as respostas da estrutura realizou-se um modelo em SIMULINK, apresentado na Figura 5.1, que permite conhecer o comportamento do pórtico a partir da sua representação em espaço de estados. Para efeitos de dimensionamento admite-se que todos os estados são mensuráveis e como consequência a matriz de saída,  $\mathbf{C}$ , será igual à matriz identidade,  $\mathbf{I}$ . As matrizes de estado e de entrada mantêm-se iguais às determinadas na secção 2.3.3.

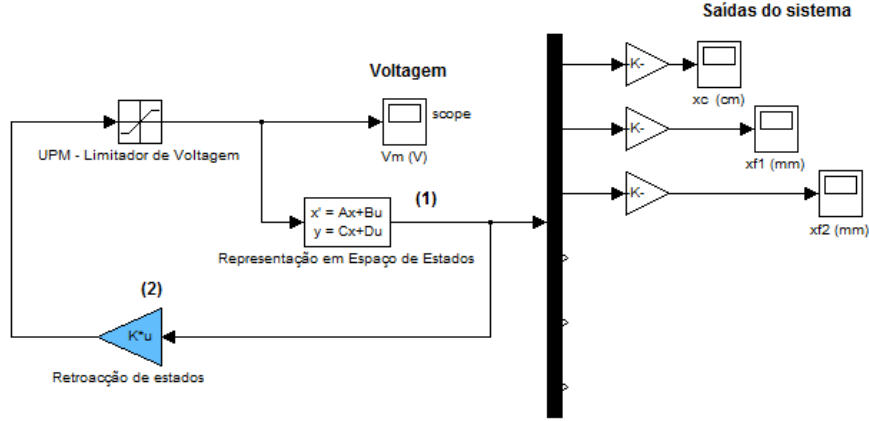


Figura 5.1: Diagrama de blocos geral para dimensionamento do controlador

O bloco (1) permite resolver a equação de estado e tem como entrada a diferença de potencial,  $V_m(t)$ , sendo o vector de saída composto pelas variáveis de estado.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

O diagrama de blocos equivalente a representação em espaço de estados está presente na Figura 5.2.

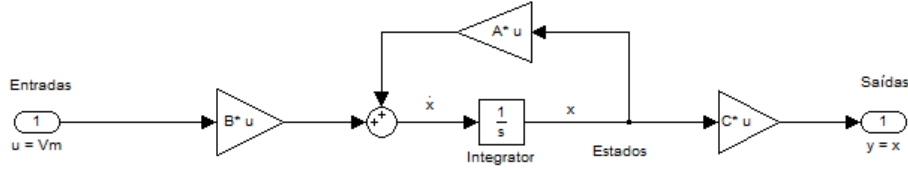


Figura 5.2: Diagrama de blocos da representação em espaço de estados para dimensionamento do controlador

### 5.1.1 Análise da Controlabilidade do Sistema

O controlo será efectuado por retroacção de estados e como tal é fundamental que o sistema seja completamente controlável. Para alterar todos os estados a característica da matriz de controlabilidade deverá ser igual ao número de estados.

$$\mathbf{W} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^4\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^5\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 3.00 & -56.1044 & 780.67 & -9.59 \times 10^3 & 2.91 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & -414.4 & 7.74 \times 10^3 & 3.52 \times 10^5 \\ 0 & -0.96 & 17.96 & 401.23 & -9.1 \times 10^3 & -5.44 \times 10^5 \\ 3.00 & -56.1 & 780.67 & -9.59 \times 10^3 & 2.91 \times 10^5 & -7.97 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -414.4 & 7.74 \times 10^3 & 3.52 \times 10^5 & -7.26 \times 10^6 \\ -0.96 & 17.96 & 401.23 & -9.1 \times 10^3 & -5.44 \times 10^5 & 1.21 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{W}$  tem característica igual ao número de estados, logo o sistema é completamente controlável.

### 5.1.2 Dimensionamento via alocação de pólos

A estratégia da alocação de pólos passa por mudar o posicionamento dos pólos para que as especificações dinâmicas sejam respeitadas. O objectivo do estudo passa por aferir a eficiência de cada controlador quando se mudam os coeficientes de amortecimento dos modos de vibração da estrutura. O pólo localizado na origem do plano-complexo deverá deslocar-se para a esquerda para que o sistema passe a ser assintoticamente estável.

#### Caso 1

Para diminuir o tempo de restabelecimento dos pisos aumentou-se o coeficiente de amortecimento dos modos de vibração para 10%, mantendo as frequências próprias do sistema em malha aberta com a excepção do primeiro modo associado ao deslocamento do AMD, para o qual se admitiu uma frequência de  $5 \text{ rad/s}$  (Tabela 5.3). Os pólos do sistema em malha fechada foram obtidos através da equação (2.50) e estão dispostos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Caso 1 - Pólos do sistema em malha aberta e malha fechada

número	sem controlo	com controlo
1	0	-5
2	$-0.67 + 10.7j$	$-1.07 + 10.65j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-1.07 - 10.65j$
4	-16.5	-16.5
5	$-0.405 + 32.3j$	$-3.23 + 32.1j$
6	$-0.405 - 32.3j$	$-3.23 - 32.1j$

Tabela 5.3: Caso 1 - Características dinâmicas dos modos de vibração

modo de vibração	sem controlo	com controlo
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 10\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 10\%$

A determinação da matriz de ganho do controlador pode ser feita a partir das equações (4.9) e (4.11). No entanto, o programa MATLAB dispõe da função *place* que retorna a matriz de ganho a partir da matriz dinâmica,  $\mathbf{A}$ , da matriz de entrada,  $\mathbf{B}$ , e dos pólos pretendidos.

$$\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \text{Polos}_1) = [30.99 \quad 76.2 \quad -154.96 \quad 2.62 \quad 4.96 \quad -3.73]$$

Como se pode observar na Figura 5.3, o tempo de estabelecimento é inferior ao estipulado pelas especificações de ambos os pisos. A diferença de potencial,  $V_m$ , aplicada ao motor não passou os 0.61V e o AMD não sofreu deslocamentos significativos para absorver as vibrações, tal como demonstra a Figura 5.4.

Os resultados obtidos são satisfatórios e indicam que se pode aumentar ainda mais os coeficientes de amortecimento por forma a reduzir a oscilação dos pisos.

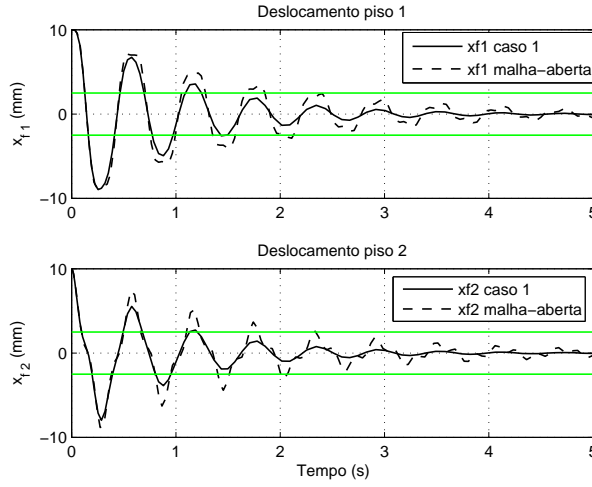


Figura 5.3: Caso 1 - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

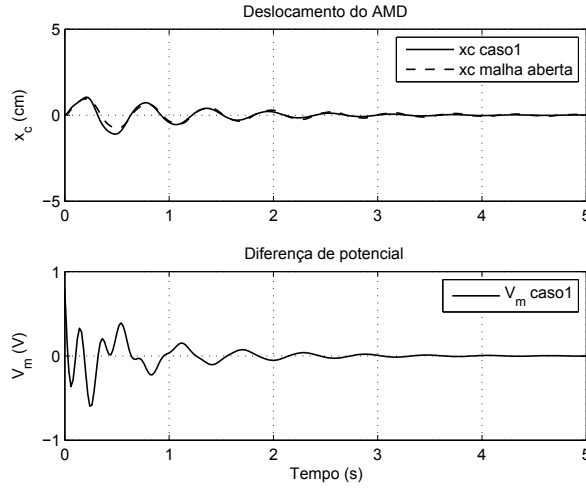


Figura 5.4: Caso 1 - Avaliação do comportamento do sistema AMD

### Caso 2

Tendo em conta que no caso anterior o sistema apresentou um movimento oscilatório, aumentaram-se os coeficientes de amortecimento para 40% e mantiveram-se as frequências próprias do sistema em malha aberta. Com esta alteração espera-se que a restituição dos pisos à sua posição de equilíbrio seja mais célere. No entanto, a tensão eléctrica deverá atingir valores superiores.

Recorrendo novamente à função *place*, do programa MATLAB, determinou-se o vector de ganho do controlador que permite modificar a dinâmica do sistema.

$$K = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \text{Polos}_2) = [30.99 \quad 365.07 \quad -948.69 \quad 4.93 \quad 5.70 \quad -23.35]$$

Tabela 5.4: Caso 2 - Pólos do sistema em malha aberta e malha fechada

número	sem controle	com controle
1	0	-5
2	$-0.67 + 10.7j$	$-4.28 + 9.81j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-4.28 - 9.81j$
4	-16.5	-16.5
5	$-0.405 + 32.3j$	$-12.92 + 29.6j$
6	$-0.405 - 32.3j$	$-12.92 - 29.6j$

Tabela 5.5: Caso 2 - Características dinâmicas dos modos de vibração

modo de vibração	sem controle	com controle
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 40\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 40\%$

Observa-se, a partir dos gráficos da Figura 5.5, que o tempo de restituição à posição de equilíbrio é próximo de 1.5 segundos. A diferença de potencial aplicada ao motor não foi além dos 4.2V o que não provoca saturação do sinal de controle. Observando a Figura 5.6, conclui-se que o deslocamento do AMD não apresenta grandes oscilações em relação à posição de equilíbrio, sendo o seu deslocamento máximo de 2.3 cm. Entendeu-se que não será necessário variar novamente os coeficientes de amortecimento dos modos de vibração visto que o desempenho do sistema de controle foi satisfatório.

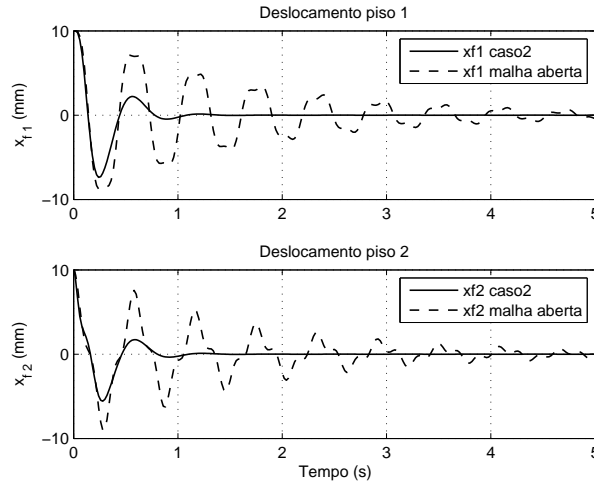


Figura 5.5: Caso 2 - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

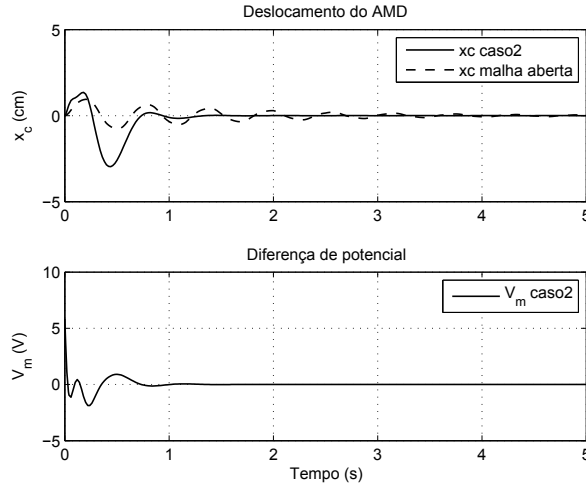


Figura 5.6: Caso 2 - Avaliação do comportamento do sistema AMD

### 5.1.3 Dimensionamento via LQR

O método de dimensionamento LQR tem como objectivo determinar a matriz de ganho  $\mathbf{K}$  que minimize a função de custo  $J$ . O problema reside em determinar as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  de modo a que o sistema respeite as especificações dinâmicas da Tabela 5.1. Para facilitar este processo admitem-se matrizes diagonais. Tendo em conta que o sistema em análise tem seis variáveis de estado e uma variável de entrada, resultam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [r_{11}]$$

Ao substituir as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  na equação (4.14) obtém-se a seguinte equação:

$$J = \int_0^\infty [x_c^2(t) q_{11} + x_{f_1}^2(t) q_{22} + x_{f_2}^2(t) q_{33} + \dot{x}_c^2(t) q_{44} + \dot{x}_{f_1}^2(t) q_{55} + \dot{x}_{f_2}^2(t) q_{66} + u^2(t) r_{11}] dt$$

Ou seja, as variáveis de estado e de entrada relacionam-se directamente com os elementos da diagonal principal das matrizes de ponderação.

Como não se conhecem à priori os componentes das matrizes de ponderação que conduzem às características dinâmicas pretendidas, o método LQR necessita de várias iterações onde se variam os pesos relacionados com cada variável de estado e de entrada.

#### 1ª iteração

O processo iterativo iniciou-se considerando  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , ao escolher estas matrizes não se deu importância relativa em reduzir a oscilação da estrutura ou em reduzir o esforço de controlo.



A matriz de ganho do controlador obteve-se a partir das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , usando a função *lqr* do programa MATLAB.

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = [1.00 \quad 2.81 \quad -5.30 \quad 0.15 \quad 0.18 \quad -0.24]$$

Como se pode observar a matriz de ganho toma valores reduzidos. Consequentemente, as posições dos pólos do sistema no plano-complexo diferem pouco em relação à situação em malha aberta (Tabela 5.6).

Tabela 5.6: Pólos do sistema (1ª iteração)

número	sem controle	com controle
1	0	-0.16
2	$-0.67 + 10.7j$	$-0.68 + 10.7j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-0.68 - 10.7j$
4	-16.5	-16.8
5	$-0.405 + 32.3j$	$-0.53 + 32.3j$
6	$-0.405 - 32.3j$	$-0.53 - 32.3j$

No entanto, o sistema passou a ser assintoticamente estável dado que o pólo referente ao AMD se deslocou para a parte negativa do plano-complexo. Tal como exposto na Tabela 5.7, os modos de vibração da estrutura continuam pouco amortecidos e as frequências próprias não se alteraram.

Tabela 5.7: Características dinâmicas dos modos de vibração (1ª iteração)

modo de vibração	sem controle	com controle
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 6.36\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 1.65\%$

Quando se impõem deslocamentos iniciais, o movimento de cada piso é oscilatório pouco amortecido, conforme demonstrado na Figura 5.7. Os gráficos da Figura 5.8 demonstram que a diferença de potencial aplicada ao motor é praticamente nula e que os deslocamentos do AMD são semelhantes ao sistema em malha aberta.

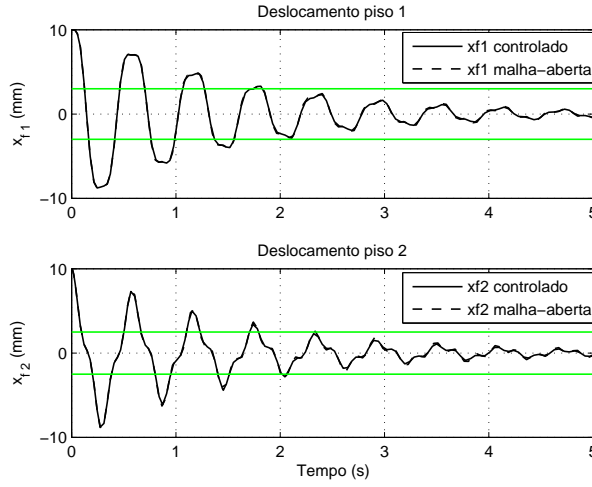


Figura 5.7: 1ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

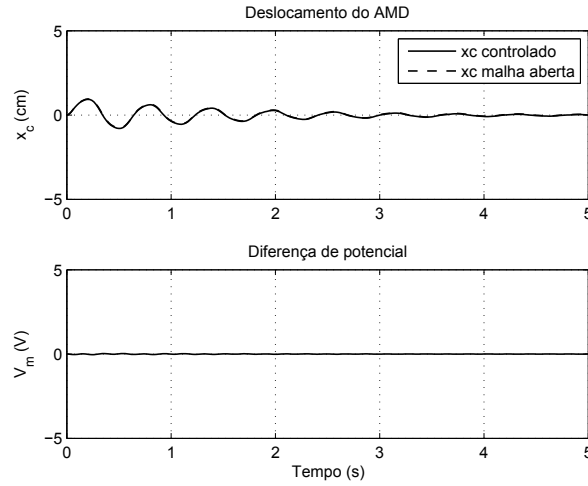


Figura 5.8: 1ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD

### 2ª iteração - Regra de Bryson

Tendo em conta as especificações da Tabela 5.1 e os valores máximos admissíveis para cada variável, determinaram-se os pesos das matrizes a partir das equações (4.16) e (4.17). Como não se pretende amplificação dos deslocamentos dos pisos, os estados  $x_{f1}$  e  $x_{f2}$  não devem ultrapassar os dez milímetros iniciais. Considerou-se que os deslocamentos do AMD não devem exceder quatro centímetros e que a diferença de potencial,  $V_m$ , a aplicar ao motor não deverá ser superior a 3V. Em relação aos estados  $\dot{x}_c$ ,  $\dot{x}_{f1}$  e  $\dot{x}_{f2}$ , admitiram-se os valores máximos verificados na resposta do sistema em malha aberta.

Tabela 5.8: Valores máximos admissíveis para as variáveis do sistema

Variável	Valor máximo	Unidade
$x_c$	4	cm
$x_{f_1}$	10	mm
$x_{f_2}$	10	mm
$\dot{x}_c$	0.15	m/s
$\dot{x}_{f_1}$	0.20	m/s
$\dot{x}_{f_2}$	0.20	m/s
$V_m$	3	V

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [0.11]$$

A matriz de ganho do controlador obtida é a seguinte:

$$\mathbf{K} = [75 \quad 59.02 \quad -551.07 \quad 18.33 \quad 5.02 \quad -1.67] \quad (5.1)$$

Conforme representado na Tabela 5.9, a parte real dos pólos associados aos modos de vibração da estrutura é superior o que implica maior coeficiente de amortecimento. As frequências próprias da estrutura diminuem como se pode verificar na Tabela 5.10.

Tabela 5.9: Pólos do sistema (2ª iteração)

número	sem controlo	com controlo
1	0	-3.60
2	$-0.67 + 10.7j$	$-1.5 + 10.2j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-1.5 - 10.2j$
4	-16.5	-62.7
5	$-0.41 + 32.3j$	$-3.1 + 31.5j$
6	$-0.41 - 32.3j$	$-3.1 - 31.5j$

Tabela 5.10: Características dinâmicas dos modos de vibração (2ª iteração)

modo de vibração	sem controlo	com controlo
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 10.3 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 14.3\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 31.7 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 9.7\%$

Atendendo aos gráficos da Figura 5.9, conclui-se que a aplicação da regra de Bryson permite obter bons resultados dado que o sistema cumpre as especificações.

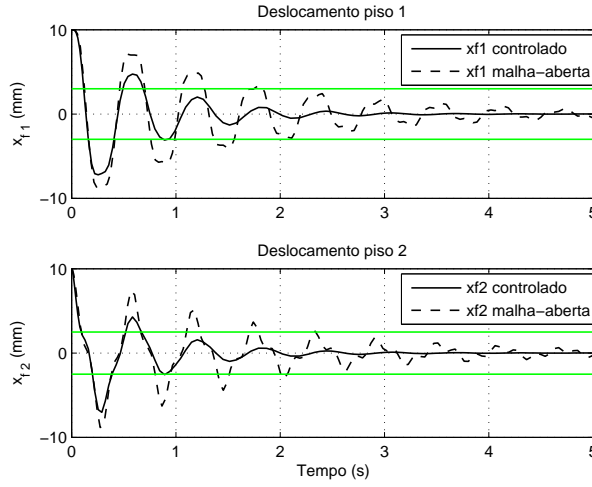


Figura 5.9: 2ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

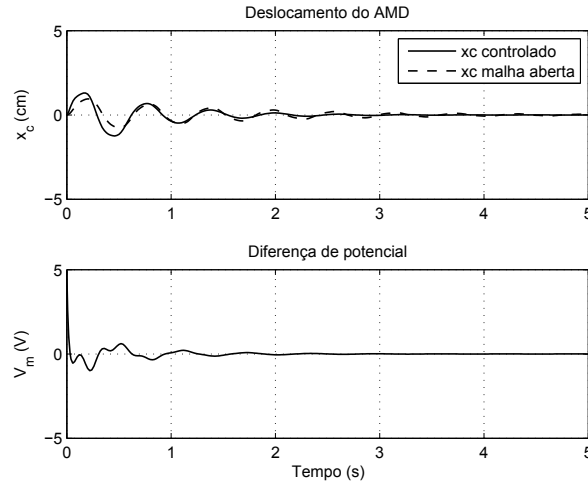


Figura 5.10: 2ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD

A Figura 5.10 permite verificar que o valor máximo de tensão eléctrica,  $V_m$ , foi de 1.5V e o deslocamento máximo atingido pelo AMD foi de 1.3cm.

Com base nos resultados obtidos pode-se concluir que o aumento dos pesos relacionados com as variáveis de estado provoca uma redução dos seus valores quando se aplica uma solicitação à estrutura. A tensão eléctrica,  $V_m$ , aumentou o que se deve à diminuição do seu peso na função de custo  $J$ .

Apesar de cumprir as especificações dinâmicas, os deslocamentos dos pisos são caracterizados por um movimento oscilatório. Os deslocamentos realizados pelo AMD foram reduzidos assim como o esforço de controlo. Como tal, procederam-se a mais iterações cujo objectivo foi amortecer ainda mais os modos de vibração da estrutura para que a resposta apresente menor oscilação em torno da posição de equilíbrio.

### 3ª iteração

Tendo em conta que o AMD se pode deslocar até  $8\text{cm}$  e que reduzir a sua velocidade não é o principal objectivo do sistema de controlo, diminuíram-se os pesos relativos aos estados  $x_c$  e  $\dot{x}_c$ . Por outro lado, pretende-se atenuar as vibrações e como tal os pesos relativos às posições e velocidades dos pisos têm que ser superiores aos restantes. Mantendo o peso relativo ao esforço de controlo,  $r_{11}$ , da iteração anterior, admitiram-se as seguintes matrizes de ponderação:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 156.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [0.11]$$

Com base nos valores escolhidos para a matriz  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  determinou-se a matriz de ganho do controlador.

$$\mathbf{K} = [37.5 \quad 1033.6 \quad -2541.8 \quad 12.8 \quad -24.1 \quad -68.3] \quad (5.2)$$

Os ganhos relativos aos estados  $x_{f_1}$  e  $x_{f_2}$  aumentaram em relação ao caso anterior. Como se esperava os ganhos  $k_1$  e  $k_4$  diminuíram visto que se reduziram os correspondentes pesos da matriz  $\mathbf{Q}$ .

Tabela 5.11: Pólos do sistema (3ª iteração)

número	sem controlo	com controlo
1	0	-2.8
2	$-0.67 + 10.7j$	$-3.6 + 7.2j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-3.6 - 7.2j$
4	-16.5	-93.0
5	$-0.41 + 32.3j$	$-9.9 + 24.8j$
6	$-0.41 - 32.3j$	$-9.9 - 24.8j$

Tabela 5.12: Características dinâmicas dos modos de vibração (3ª iteração)

modo de vibração	sem controlo	com controlo
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 8.0 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 44.43\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 26.7 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 36.93\%$

A oscilação dos pisos reduziu como se pode observar na Figura 5.11. Tal facto deve-se ao aumento do factor de amortecimento e à redução das frequências próprias de estrutura (Tabela 5.12). Ou seja, o módulo dos números complexos associados diminuiu, mas a parte real dos mesmos aumentou (Tabela 5.11).

## Dimensionamento do sistema de controle

Atendendo aos resultados obtidos pode-se concluir que o controlador reduz a oscilação. No entanto, a diferença de potencial aplicada para reduzir a vibração ultrapassa os 15V nos instantes iniciais (Figura 5.12). Este aumento do custo do controlador deve-se aos elevados ganhos da matriz **K**.

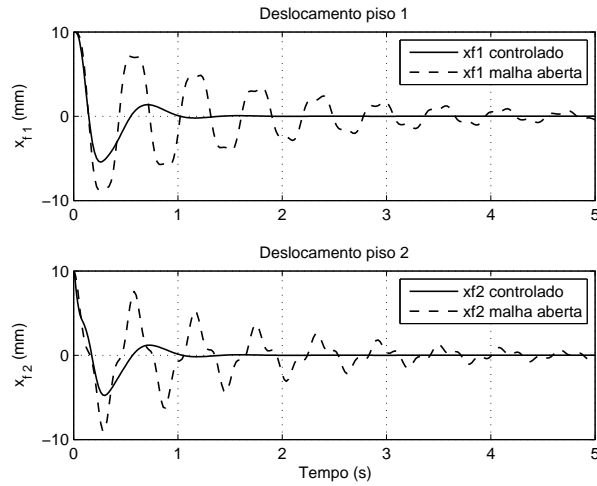


Figura 5.11: 3ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

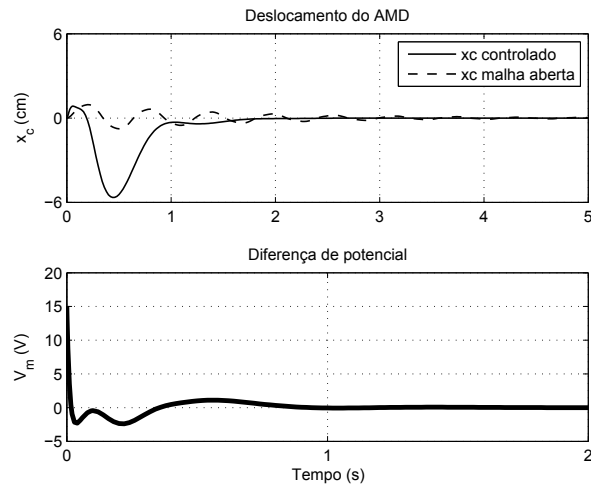


Figura 5.12: 3ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD

#### 4ª iteração

Na tentativa de reduzir a diferença de potencial aplicada ao motor reduziram-se os pesos referentes às variáveis de estado  $\dot{x}_c$ ,  $\dot{x}_{f_1}$  e  $\dot{x}_{f_2}$ . Desta forma, reduz-se a razão entre os pesos referidos e o peso do esforço de controle na função de custo  $J$ .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 156.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [0.11]$$

A matriz de ganho do controlador que minimiza a função de custo  $J$  é a seguinte:

$$\mathbf{K} = [37.5 \quad 229.6 \quad -723.2 \quad 5.17 \quad 1.61 \quad -20.21] \quad (5.3)$$

Todos os valores da matriz  $\mathbf{K}$  sofreram alterações com exceção do valor referente à posição do AMD. Conforme representado na Tabela 5.13, a parte real dos pólos é superior ao caso em malha aberta o que garante uma alteração do amortecimento. Atendendo aos valores da Tabela 5.14 pode-se verificar que as frequências próprias são inferiores às do sistema em malha aberta, no entanto são superiores às obtidas na 3ª iteração. Esta diferença deve-se à diminuição dos pesos correspondentes aos estados  $\dot{x}_{f_1}$  e  $\dot{x}_{f_2}$ . No caso anterior como os pesos eram superiores o sistema adquiriu uma dinâmica mais lenta, ou seja, as frequências próprias da estrutura diminuiram.

Tabela 5.13: Pólos do sistema (4ª iteração)

número	sem controle	com controle
1	0	-5.7
2	$-0.67 + 10.7j$	$-3.1 + 8.9j$
3	$-0.67 - 10.7j$	$-3.1 - 8.9j$
4	-16.5	-24.4
5	$-0.41 + 32.3j$	$-8.6 + 29.7j$
6	$-0.41 - 32.3j$	$-8.6 - 29.7j$

Tabela 5.14: Características dinâmicas dos modos de vibração (4ª iteração)

modo de vibração	sem controle	com controle
1º Modo	$\omega_1 = 10.7 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 9.46 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 6.24\%$	$\xi_1 = 33.03\%$
2º Modo	$\omega_2 = 32.3 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 30.98 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 1.25\%$	$\xi_2 = 27.96\%$

## Dimensionamento do sistema de controlo

Conforme se pode observar na Figura 5.13, a resposta estrutural é amortecida e a oscilação dos pisos é atenuada em menos de 2 segundos. O gráfico da Figura 5.14 permite verificar que a tensão eléctrica é menor em relação à iteração anterior, não ultrapassando os 5V. Os deslocamentos efectuados pelo AMD para reduzir as vibrações também diminuíram.

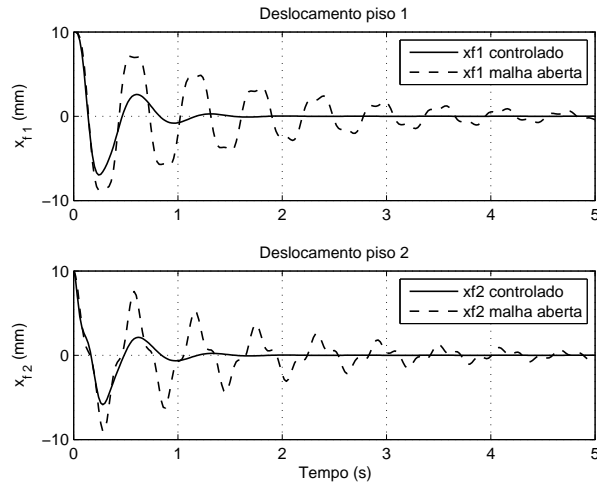


Figura 5.13: 4ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

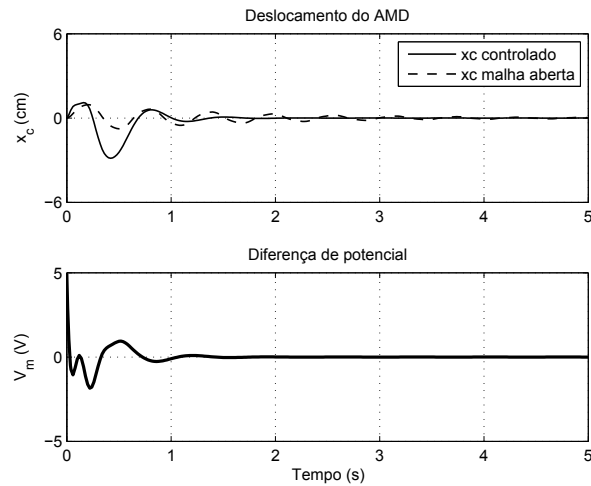


Figura 5.14: 4ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD



### 5ª iteração

Com base nos resultados obtidos na terceira iteração, concluí-se que o aumento simultâneo dos pesos relativos às posições e velocidades permite conferir maior amortecimento à estrutura. Contudo, a diferença de potencial aplicada ao motor para atenuar as vibrações atingiu valores altos para o tipo de acção imposta.

A presente iteração tem como objectivo observar o comportamento do sistema quando se aumenta o peso relativo ao esforço de controlo.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 156.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [1]$$

A matriz de ganho do controlador obtida a partir da função *lqr* do programa MATLAB é a seguinte:

$$\mathbf{K} = [12.5 \quad 255.4 \quad -675.7 \quad 1.82 \quad -3.76 \quad -28.49] \quad (5.4)$$

Observe-se as Tabelas 5.15 e 5.16, onde se pode comparar as posições dos pólos e as correspondentes características dinâmicas para as últimas três iterações.

Tabela 5.15: Pólos dos sistemas de controlo

número	com controlo 3ª iteração	com controlo 4ª iteração	com controlo 5ª iteração
1	-2.8	-5.7	-2.0
2	$-3.6 + 7.2j$	$-3.1 + 8.9j$	$-3.6 + 8.6j$
3	$-3.6 - 7.2j$	$-3.1 - 8.9j$	$-3.6 - 8.6j$
4	-93.0	-24.4	-23.9
5	$-9.9 + 24.8j$	$-8.7 + 29.7j$	$-9.2 + 29.5j$
6	$-9.9 - 24.8j$	$-8.7 - 29.7j$	$-9.2 - 29.5j$

Tabela 5.16: Características dinâmicas dos modos de vibração

modo de vibração	com controlo 3ª iteração	com controlo 4ª iteração	com controlo 5ª iteração
1º Modo	$\omega_1 = 8.0 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 9.46 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 9.35 \text{ rad/s}$
	$\xi_1 = 44.43\%$	$\xi_1 = 33.0\%$	$\xi_1 = 38.9\%$
2º Modo	$\omega_2 = 26.7 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 30.98 \text{ rad/s}$	$\omega_2 = 30.85 \text{ rad/s}$
	$\xi_2 = 36.93\%$	$\xi_2 = 27.96\%$	$\xi_2 = 29.75\%$

## Dimensionamento do sistema de controlo

Conforme representado na Figura 5.15, o controlador obtido nesta última iteração permite reduzir as oscilações de ambos os pisos. A Figura 5.16 permite verificar que o deslocamento máximo do AMD foi próximo dos  $5\text{cm}$  em relação à posição de equilíbrio.

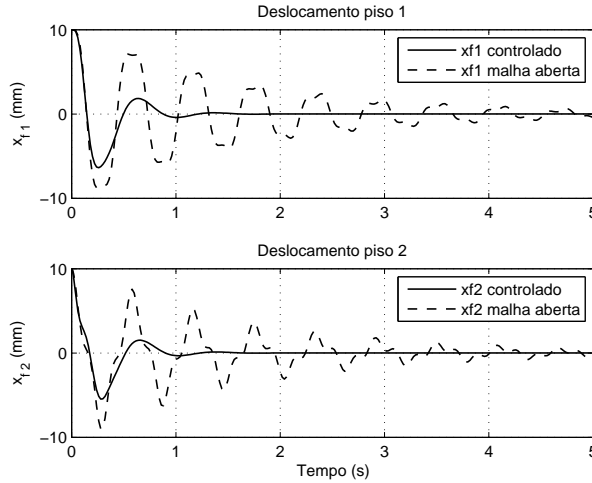


Figura 5.15: 5ª iteração - Comparação entre deslocamentos em malha aberta e malha fechada

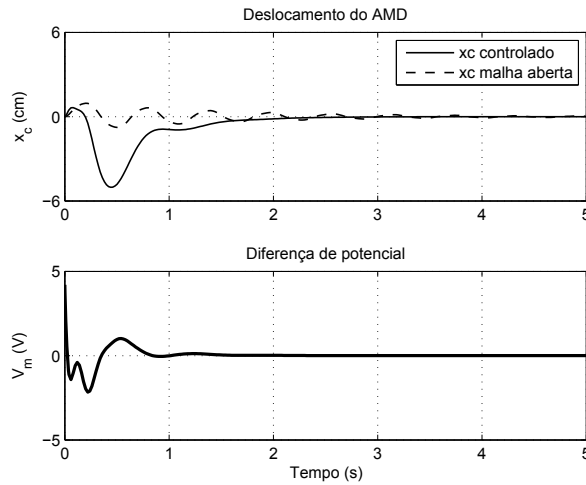


Figura 5.16: 5ª iteração - Avaliação do comportamento do sistema AMD

Comparando os controladores das três últimas iterações podemos concluir que em termos de atenuação das vibrações o controlador da terceira iteração é o mais célere. No entanto, o esforço de controlo deve ser tido em conta e como tal este controlador pode não ser o melhor em termos de desempenho em serviço podendo a tensão eléctrica superar os limites do actuador.

Atendendo aos valores da Tabela 5.17, é possível verificar que o comportamento estrutural obtido na quarta iteração não apresenta grande diferença para o alcançado na quinta iteração. Em termos de diferença de potencial a aplicar ao motor os valores diferem apenas em  $0.7\text{ V}$ , mas em termos de deslocamentos do AMD a diferença aumenta, sendo o deslocamento superior

para o controlador da quinta iteração. Tal facto deve-se à relação entre os pesos das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ . Na quarta iteração os valores de  $q_{11}$ ,  $q_{44}$  e  $r_{11}$  indicam que é mais importante reduzir os deslocamentos e a velocidade do AMD do que reduzir a tensão eléctrica, resultando uma frequência associada ao AMD de  $5.72 \text{ rad/s}$ . Como os quocientes  $q_{11}/r_{11}$  e  $q_{rr}/r_{11}$  diminuem para a quinta iteração, a importância de reduzir os deslocamentos também diminui e como tal os deslocamentos do AMD aumentaram, enquanto a frequência própria associada diminuiu.

Tabela 5.17: Comparação dos valores máximos das variáveis do sistema

	$ x_{f1}  [mm]$	$ x_{f2}  [mm]$	$ x_c  [cm]$	$V_m [V]$
3ª Iteração	5.42	4.76	5.66	15.1
4ª Iteração	6.98	5.87	2.86	4.9
5ª Iteração	6.38	5.46	5.03	4.2

Atendendo aos valores da Tabela 5.17, é possível concluir que o controlador obtido na quinta iteração seria o que teria melhor desempenho, visto que reduz deslocamentos dos pisos sem que o AMD ultrapasse os limites do pórtico e requer menos energia que os controladores obtidos nas duas iterações precedentes.

## 5.2 Dimensionamento do Observador de Estados

Tendo em conta que os sensores disponíveis apenas medem a posição do AMD e as acelerações de ambos os pisos da estrutura, foi necessário introduzir na malha de retroacção um observador que a partir do vector de saída consiga estimar todos os estados. Para dimensionar o observador desenvolveu-se um modelo em SIMULINK, representado na Figura 5.17, que permite determinar os estados estimados. As estimativas foram comparadas com os valores que se obteriam caso os estados fossem medidos por sensores.

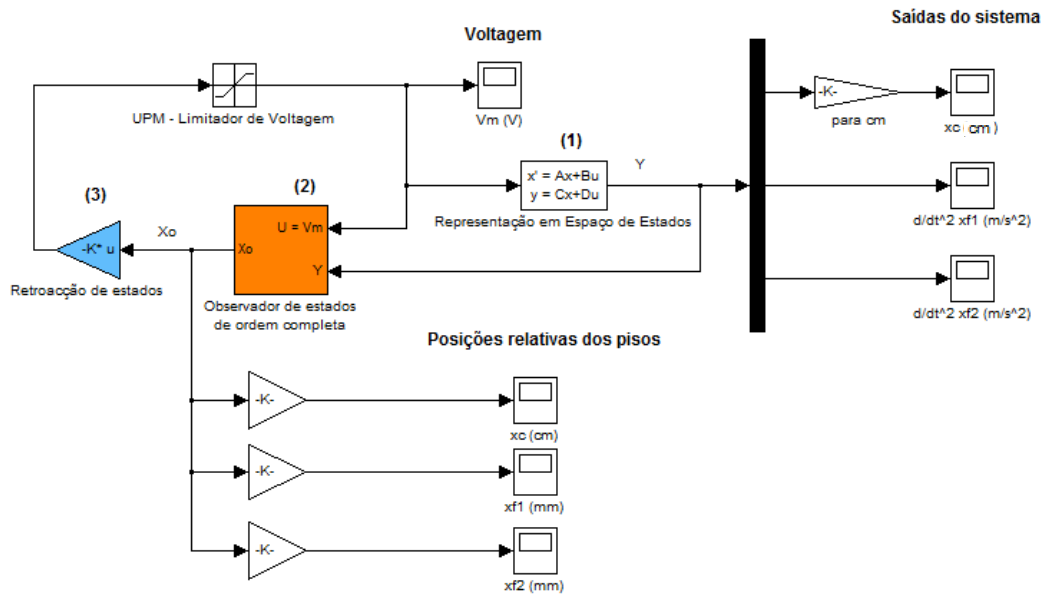


Figura 5.17: Diagrama de blocos geral para dimensionamento do observador

## Dimensionamento do sistema de controlo

O bloco (1) contém o diagrama de blocos da Figura 5.18 que permite resolver as equações do movimento, retornando os valores das variáveis mensuráveis ( $x_c$ ,  $\ddot{x}_{f1}$  e  $\ddot{x}_{f2}$ ) do sistema AMD-2. O vector de entrada corresponde ao sinal de controlo,  $\mathbf{u}(t)$ , e as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são as determinadas na secção 2.3.3.

Os valores iniciais das variáveis de estado foram definidos na secção 5.1 e os ganhos do bloco (3) foram obtidos no caso 2 da secção 5.1.2.

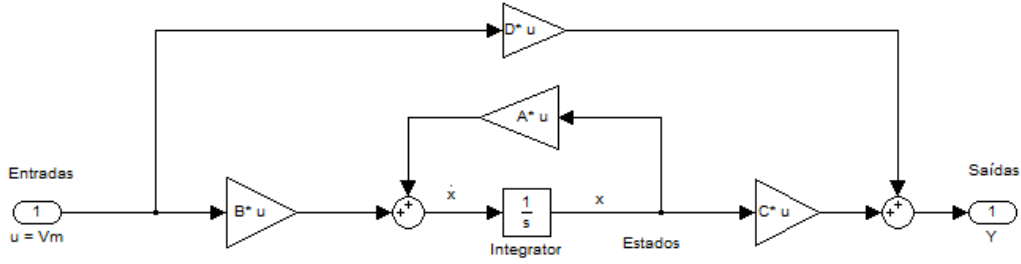


Figura 5.18: Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do sistema AMD-2

O bloco (2) representa a dinâmica do observador que pode ser caracterizada pelo diagrama de blocos da Figura 5.19, onde se observa que as saídas correspondem ao vector de estados estimado,  $\mathbf{x}_o$ .

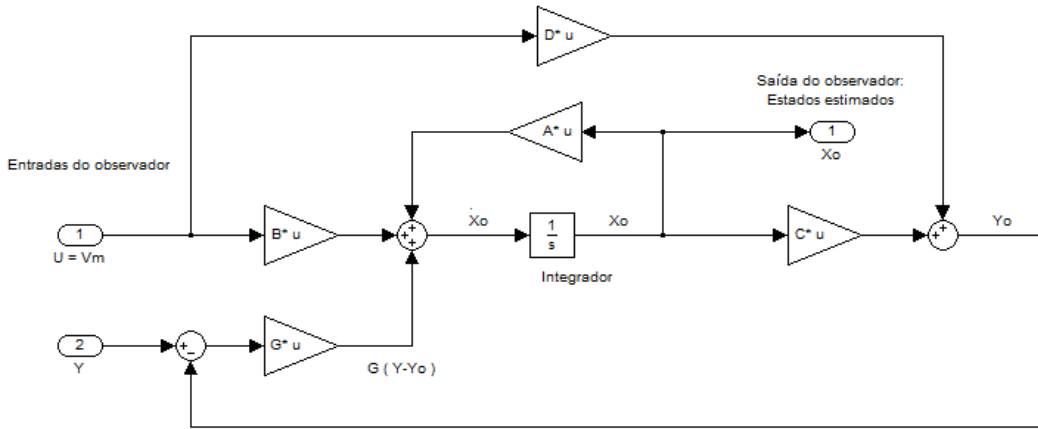


Figura 5.19: Diagrama de blocos da representação em espaço de estados do observador

### 5.2.1 Análise da Observabilidade do sistema

A estimativa de todos os estados do sistema pode ser feita por intermédio de um observador se e só se o sistema for completamente observável. A observabilidade do sistema obtém-se através da característica da matriz de observabilidade, dada na equação (4.2).

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^4 \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^5 \mathbf{C}^T]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -431.03 & 431.03 \\ 0 & 0 & 1.67 \times 10^3 & -111.80 & 431.03 & -766.49 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & 3.71 \times 10^5 & -5.16 \times 10^5 & 2.58 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & -5.16 \times 10^5 & 7.42 \times 10^5 & -2.50 \times 10^3 & 0 & 1.67 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -5.20 \times 10^3 & 349.16 & 0 & 278.43 \\ 0 & 0 & 7.18 \times 10^5 & -4.82 \times 10^4 & 3.72 \times 10^5 & -5.16 \times 10^5 \\ 0 & 7.18 \times 10^5 & -1.97 \times 10^6 & 5.66 \times 10^4 & -5.16 \times 10^5 & 7.42 \times 10^5 \\ 0 & 1.20 \times 10^5 & -1.16 \times 10^5 & -4.86 \times 10^3 & 0 & -5.20 \times 10^3 \\ 0 & -3.83 \times 10^8 & 5.42 \times 10^8 & -2.18 \times 10^6 & 0 & 7.18 \times 10^5 \\ 0 & 5.42 \times 10^8 & -7.76 \times 10^8 & 3.38 \times 10^6 & 7.18 \times 10^5 & -1.97 \times 10^6 \\ 0 & -2.242 \times 10^6 & 2.64 \times 10^6 & 5.97 \times 10^4 & 1.20 \times 10^5 & -1.16 \times 10^3 \\ 0 & 3.10 \times 10^8 & -1.16 \times 10^9 & 4.52 \times 10^7 & -3.83 \times 10^8 & 5.42 \times 10^8 \\ 0 & -1.16 \times 10^9 & 2.76 \times 10^9 & -7.50 \times 10^7 & 5.42 \times 10^8 & -7.76 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Como a característica da matriz  $\mathbf{N}$  é igual ao número de estados, conclui-se que o sistema é completamente observável.

### 5.2.2 Dimensionamento via alocação de pólos

Tal como foi referido na secção 4.5.2, quando a retroacção de estados se realiza a partir dos valores estimados por um observador a equação de estados é dada da seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema calculam-se através da seguinte equação característica:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = 0$$

A dinâmica do erro é caracterizada pela equação (4.26)

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\mathbf{e}(t)$$

O problema passa por determinar os valores próprios da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$  que permitam que o vector de estado estimado,  $\mathbf{x}_o$ , se aproxime rapidamente do vector de estado que se obteria caso estivesse disponível para medição. Analogamente ao caso do controlador,  $\mathbf{K}$ , a matriz de ganho,  $\mathbf{G}$ , pode ser obtida pelo método da alocação de pólos.

Tendo como base de comparação os estados  $x_{f1}$ ,  $x_{f2}$ , e  $x_c$  obtidos para o caso 2 da secção 5.1.2, efectuou-se um estudo onde se variam as posições dos pólos do observador com o objectivo de encontrar a matriz de ganho,  $\mathbf{G}$ , que permite obter uma boa aproximação.

### Observador 1

Como ponto de partida compararam-se as estimativas dos estados obtidas por um observador cujos pólos são iguais aos do controlador.

$$OP_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4.28 + 9.81j & -4.28 - 9.81j & -16.54 & -12.92 + 29.6j & -12.92 + 29.6j \end{bmatrix}$$

A matriz de ganho do observador pode ser obtida através da função *place* do programa MATLAB:

$$\mathbf{G}_1 = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, OP_1)^T = \begin{bmatrix} 17.9 & -0.1 & -0.1 \\ 4.4 & 0 & 0 \\ -16.6 & 0 & 0 \\ -2.7 & -0.9 & -1.0 \\ 103.4 & 0 & -0.4 \\ -119.6 & 0.6 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Tal como se pode observar na Figura 5.20, a estimativa converge para os valores das variáveis de estado lentamente, em resultado da escolha feita para os pólos do observador.

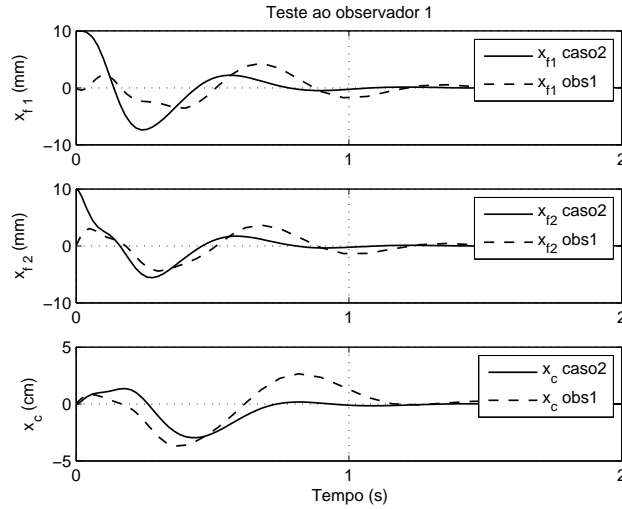


Figura 5.20: Observador 1 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa

### Observador 2

Para que a dinâmica do observador seja mais rápida os pólos da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$  devem afastar-se do eixo imaginário. Como tal multiplicou-se o vector  $OP_1$  por dois para que a dinâmica do erro seja mais rápida.

$$OP_2 = \begin{bmatrix} -10 & -8.56 + 19.61j & -8.56 - 19.61j & -33.08 & -25.84 + 59.20j & -25.84 - 59.20j \end{bmatrix}$$

A matriz de ganho calculada é a seguinte:

$$\mathbf{G}_2 = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, OP_2)^T = \begin{bmatrix} 29.8 & -0.2 & -0.1 \\ -20.0 & -0.3 & -0.2 \\ -16.12 & 0 & 0 \\ -86.7 & -1.6 & -1.3 \\ -88.0 & -5.6 & -4.0 \\ -439.2 & -4.8 & -3.4 \end{bmatrix}$$

A Figura 5.21 demonstra que a estimativa já se aproxima dos valores esperados para as variáveis de estado.

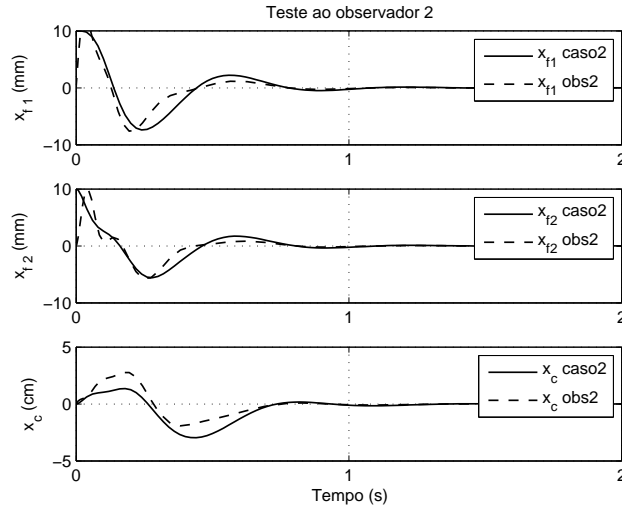


Figura 5.21: Observador 2 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa

No entanto, ainda existe uma diferença que pode ser diminuída se a parte imaginária dos pólos for nula, correspondendo a um amortecimento de 100%.

### Observador 3

Na presente iteração optou-se por colocar todos os pólos sobre o eixo real, sendo o valor absoluto superior ao caso anterior.

$$OP_3 = [-40 \quad -45 \quad -50 \quad -55 \quad -60 \quad -65]$$

$$\mathbf{G}_3 = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, OP_3)^T = \begin{bmatrix} 93.1 & 0 & 0 \\ 24.1 & -0.6 & -0.3 \\ 32.1 & -0.3 & -0.3 \\ 1520.9 & -1.6 & -1.5 \\ -611.9 & -14.3 & -8.6 \\ -244.5 & -6.6 & -5.8 \end{bmatrix}$$

Atendendo aos gráficos da Figura 5.22, conclui-se que o observador 3 estima bem os estados. De facto a dinâmica do observador deve ser três a cinco vezes mais rápida que a dinâmica do sistema. Os pólos devem situar-se sobre o eixo real para que o vector erro,  $\mathbf{e}(t)$ , se aproxime de zero de um forma célere.

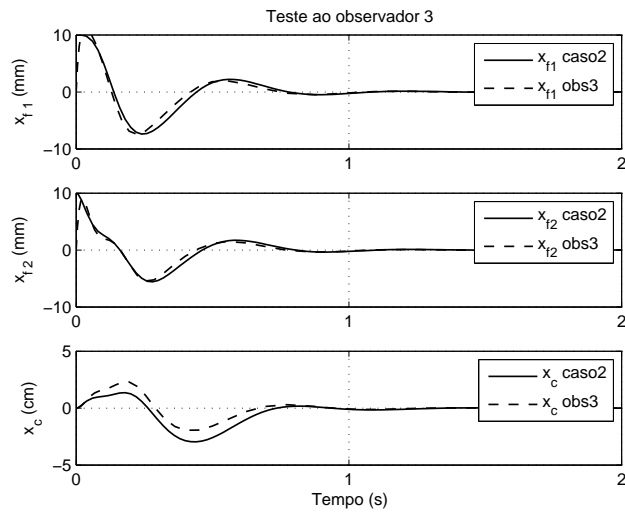


Figura 5.22: Observador 3 - Comparação entre o valor dos estados e sua estimativa



## Capítulo 6

# Avaliação do comportamento da estrutura para uma solicitação sísmica

No sentido de testar a eficiência do sistema de controlo, desenvolveram-se dois modelos em SIMULINK. O primeiro permite determinar os deslocamentos e as acelerações dos pisos da estrutura original, quando a esta se aplica uma aceleração da base. Para a mesma solicitação, o segundo modelo simula o comportamento do sistema AMD-2, onde se calcula o vector de saída constituído pelas acelerações relativas dos pisos e a posição do AMD. O mesmo modelo também permite simular o funcionamento do observador de estados que se baseia nas medições dos sensores, na diferença de potencial a aplicar ao motor e nas acelerações medidas na base.

### 6.1 Representação da estrutura sem AMD em espaço de estados

Em primeiro lugar foi necessário determinar as equações do movimento e reescrevê-las segundo a formulação de espaço de estados. As equações que regem o movimento dos pisos foram determinadas pelo método de Lagrange (Apêndice D).

$$\begin{aligned} (M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + M_{f_2} \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_1} x_{f_1}(t) &= - (M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_b(t) \\ M_{f_2} \ddot{x}_{f_1}(t) + M_{f_2} \ddot{x}_{f_2}(t) + K_{f_2} x_{f_2}(t) &= -M_{f_2} \ddot{x}_b(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Para efeitos de dimensionamento considerou-se nulo o amortecimento da estrutura, o que não corresponde à realidade. Quando ocorrem deslocamentos elevados, existem mais secções a atingir a cedência o que faz aumentar a dissipação de energia e como consequência acresce o amortecimento estrutural [5].

Segundo as referências [34, 21], o coeficiente de amortecimento dos modos de vibração de estruturas como pórticos de pisos rígidos sujeitos a acções sísmicas é aproximadamente 1%. Assumindo  $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$ , obteve-se a matriz de amortecimento,  $\mathbf{C}_s$ , pelo método do amortecimento de Rayleigh.

$$\mathbf{C}_s = a_0 \mathbf{M}_s + a_1 \mathbf{K}_s$$

Os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  foram calculados a partir da equação (2.52)

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/12.8 & 12.8 \\ 1/33.6 & 33.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1857 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$$

A partir das equações do movimento e da matriz de amortecimento representou-se o comportamento da estrutura através da seguinte equação matricial:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{q}(t) = \mathbf{J}_{sismo} \ddot{x}_b$$

Substituindo pelos valores disponíveis no Apêndice B

$$\begin{bmatrix} 2.32 & 1.16 \\ 1.16 & 1.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.646 & 0.215 \\ 0.215 & 0.431 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.32 \\ -1.16 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

Tendo em conta que a única variável de entrada corresponde ao sinal da aceleração da base, a equação de estado pode ser obtida a partir da equação (2.40)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{sismo}\ddot{x}_b(t) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C}_s \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{J}_{sismo} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & -0.371 & 0.186 \\ 431.03 & -862.07 & 0.186 & -0.557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b \end{aligned}$$

A simulação do sistema realizou-se em SIMULINK, onde se admitiu a existência de sensores que medem as posições e as acelerações dos pisos. Desta forma a equação de saída da representação em espaço de estados é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -431.03 & 431.03 & -0.371 & 0.186 \\ 431.03 & -862.07 & 0.186 & -0.557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b \quad (6.2)$$

A Figura 6.1 demonstra o diagrama de blocos geral do modelo, onde o bloco espaço de estados retorna o vector de saída do sistema e tem como entrada um sinal equivalente ao sismo de Kobe.

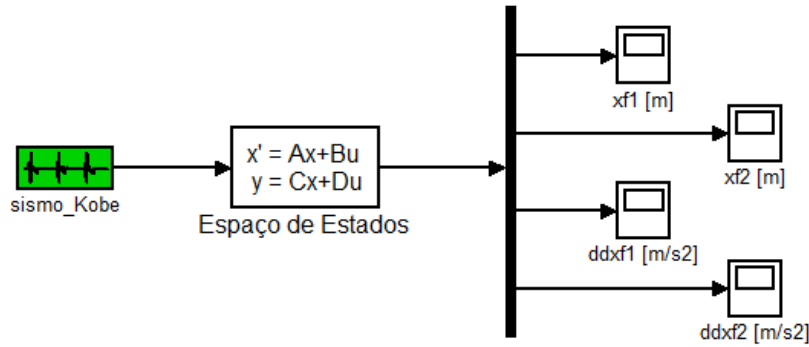


Figura 6.1: Diagrama de blocos em Simulink - Sismo de Kobe - sem AMD

## 6.2 Representação da estrutura com AMD em espaço de estados

As equações do movimento da estrutura, dotada de um AMD no seu topo, para a actuação de um sismo foram determinadas a partir do método de Lagrange e podem ser consultadas no Apêndice D.

$$\begin{aligned} \frac{(M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{r_{mp}^2} \ddot{x}_c(t) + M_c (\ddot{x}_{f_1}(t) + \ddot{x}_{f_2}(t)) + \left( B_{eq} + \frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \dot{x}_c(t) = \\ = \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(t) - M_c \ddot{x}_b(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} K_{f_1} x_{f_1}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) = \\ = -(M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_b(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} K_{f_2} x_{f_2}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) = \\ = -(M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_b(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para representar o sistema sob a formulação de espaço de estados é útil reescrever as equações do movimento em relação às acelerações relativas  $\ddot{x}_c$ ,  $\ddot{x}_{f_1}$  e  $\ddot{x}_{f_2}$ . As equações do movimento podem ser acopladas na seguinte equação matricial:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{q}(t) - \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{J}_s V_m(t) + \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{J}_{sismo} \ddot{x}_b(t) \quad (6.6)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{K}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{J}_s$  são as obtidas na secção 2.3.3, sendo a matriz  $\mathbf{J}_{sismo}$  preenchida da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_{sismo} = [-M_c \quad -(M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \quad -(M_c + M_{f_2})]^T$$

Atendendo à equação (6.6) é possível obter a equação de estado do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{sismo} \ddot{x}_b(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{K}_s & -\mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{J}_s \end{bmatrix} V_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{J}_{sismo} \end{bmatrix} \ddot{x}_b(t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.2.1 Controlo passivo - malha aberta

Caso o sistema de controlo se encontre inactivo, a parcela referente à diferença de potencial,  $V_m$ , a aplicar ao motor é nula. No entanto, continua a existir dissipação de energia por atrito o que confere amortecimento passivo à estrutura. Ao substituir os valores dos parâmetros do sistema, disponíveis no Apêndice B, obtém-se a seguinte equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f_1} \\ \dot{x}_{f_2} \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_{f_1} \\ \ddot{x}_{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{f_1} \\ x_{f_2} \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f_1} \\ \dot{x}_{f_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

Tendo em conta que o deslocamento do AMD e as acelerações dos pisos são mensuráveis, a equação de saída do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_c \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

### 6.2.2 Controlo activo - malha fechada

Quando o sistema de controlo se encontra activo é aplicada uma diferença de potencial ao motor do AMD para que este se mova ao longo do eixo de forma a aplicar a força de controlo à estrutura. Tal como descrito na secção 5.1.2 o controlo realiza-se através da retroacção de estados.

$$\mathbf{u}(t) = V_m(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

Como tal a equação de estado pode ser dada da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{sismo} \ddot{x}_b \quad (6.8)$$

Os ganhos da matriz do controlador,  $\mathbf{K}$ , foram obtidos na secção 5.1.2 (caso 2) e possibilitam aumentar os coeficientes de amortecimento dos modos de vibração para 40%, mantendo as frequências próprias do sistema em malha aberta.

$$\mathbf{K} = [30.99 \quad 365.07 \quad -948.69 \quad 4.93 \quad 5.70 \quad -23.35]$$

Substituindo as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_{sismo}$  e  $\mathbf{K}$  na equação (6.8) resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 93.0 & -1096.1 & 3126.9 & -33.5 & -17.1 & 70.1 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 29.8 & 782 & -1678.6 & 10.7 & 5.5 & -22.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

A Figura 6.2 demonstra o diagrama de blocos do modelo desenvolvido em SIMULINK que permite simular o sistema AMD-2 quando este é sujeito a uma aceleração de base. A representação em espaço de estados tem duas entradas e como se pode ver na Figura 6.3, acrescentaram-se dois ganhos relativos às matrizes  $\mathbf{B}_{sismo}$  e  $\mathbf{D}_{sismo}$ .

O programa pretende simular um sistema de controlo que se baseia em medições das acelerações de base. Como tal o observador tem como entradas a diferença de potencial aplicada ao motor,  $V_m(t)$ , as medições da aceleração da base,  $\ddot{x}_b(t)$  e o vector de saída  $\mathbf{y}(t)$ . As equações que caracterizam a dinâmica do observador são as seguintes:

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B} V_m(t) + \mathbf{B}_{sismo} \ddot{x}_b(t) + \mathbf{G}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o(t))$$

$$\mathbf{y}_o(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{D} V_m(t) + \mathbf{D}_{sismo} \ddot{x}_b(t)$$

A Figura 6.4 representa o diagrama de blocos que permite obter a estimativa dos estados em SIMULINK. Os ganhos da matriz  $\mathbf{G}$  do observador foram obtidos na secção 5.2.

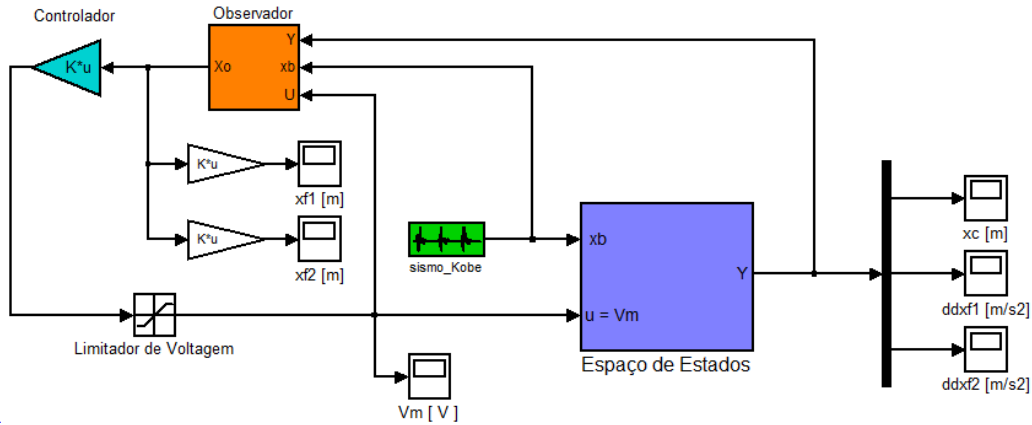


Figura 6.2: Diagrama de blocos em Simulink - Sismo de Kobe - com AMD

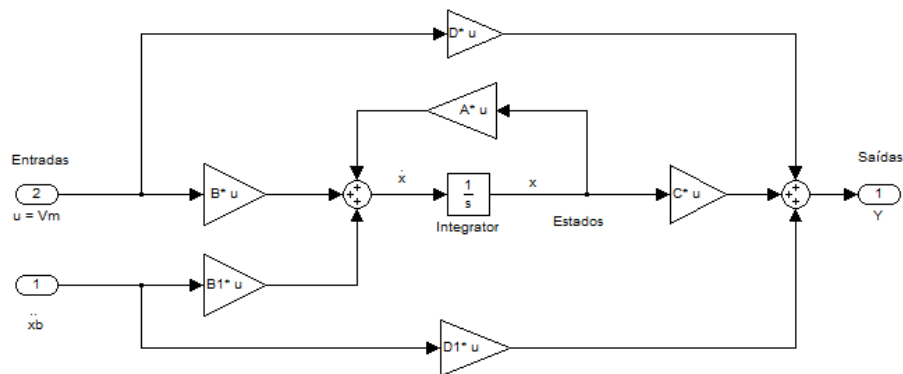


Figura 6.3: Diagrama de blocos de espaço de estados referente à actuação de um sismo

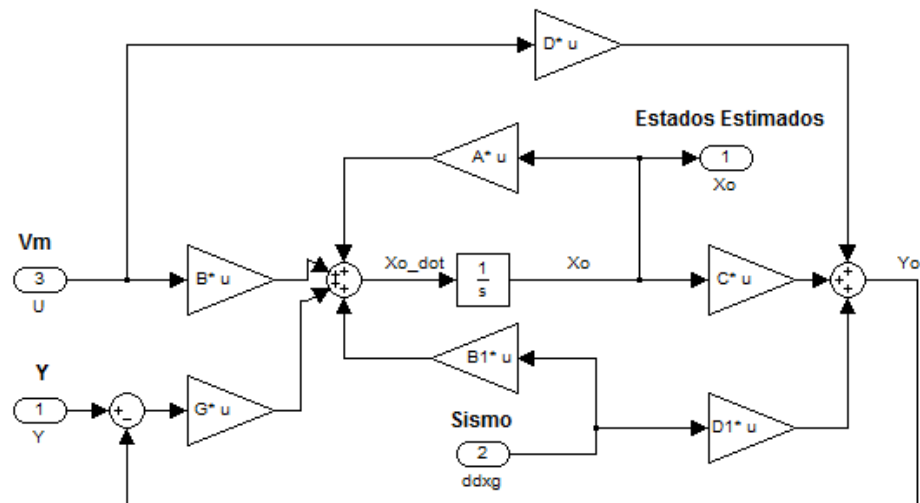


Figura 6.4: Diagrama de blocos do observador de estados referente à actuação de um sismo

### 6.3 Apresentação e apreciação de resultados

O sinal de perturbação escolhido está representado na Figura 6.5 e corresponde ao sismo de Kobe escalado para a mesa sísmica disponível no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologias.

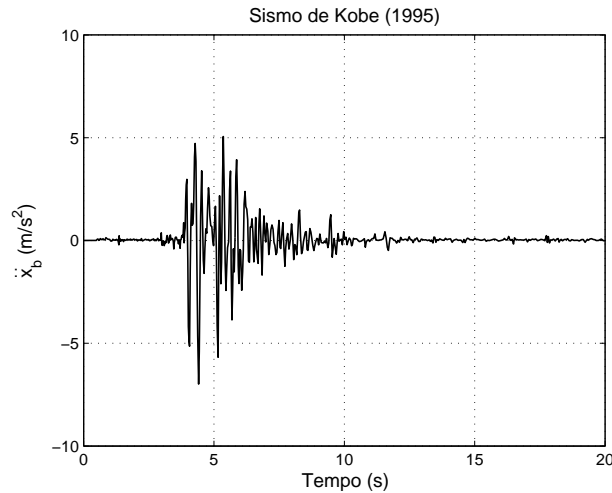


Figura 6.5: Sinal equivalente ao sismo de Kobe

A Tabela 6.1 demonstra os resultados obtidos através da simulação. Avaliaram-se as respostas da estrutura original e comportamento do sistema com AMD quando o controlador se encontra activo e inactivo.

Tabela 6.1: Valores máximos obtidos a partir da simulação do sismo de Kobe

	sem AMD	com controlo inactivo	com controlo activo
$ x_{f1} $ [mm]	56.9	45.6 (−19.9%)	22.7 (−60.1%)
$ x_{f2} $ [mm]	40.8	34.5 (−15.4%)	16.1 (−60.5%)
$ \ddot{x}_{f1} $ [m/s <sup>2</sup> ]	15.6	14.9 (−4.5%)	8.5 (−45.5%)
$ \ddot{x}_{f2} $ [m/s <sup>2</sup> ]	16.1	14.6 (−9.3%)	5.7 (−64.6%)

Atendendo aos resultados obtidos, é possível concluir que o sistema AMD permite reduzir eficazmente a resposta estrutural para a acção do sismo de Kobe. Os deslocamentos relativos dos pisos podem ser consultados nos gráficos das Figuras 6.7 e 6.9. O controlador activo possibilitou uma redução de 60.1 % do valor máximo do deslocamento relativo do primeiro piso e uma redução de 60.5 % para o segundo piso. A partir dos gráficos das Figuras 6.11 e 6.13 pode-se concluir que as acelerações dos pisos são menores quando comparadas com as acelerações obtidas para a estrutura original. A acção de controlo foi mais eficaz na redução do pico de aceleração relativa do segundo piso do que no caso primeiro piso. Os deslocamentos do AMD estão representados na Figura 6.14 e o valor máximo é igual a 6.3 cm, não excedendo os limites físicos do pórtico. A partir da Figura 6.15, pode constatar-se que a diferença de potencial,  $V_m$ , a aplicar ao motor do AMD não excede o limite de saturação de 13V, ou seja, para a acção dinâmica imposta não existe quebra da malha de retroacção.

O amortecimento conferido de forma passiva permitiu reduzir os picos de deslocamentos relativos dos pisos em 19.9% e 15.4% respectivamente. Note-se que a partir dos 8 segundos

a aceleração da base reduz substancialmente, aproximando-se de zero, e as oscilações da estrutura decaem de acordo com o seu amortecimento. Os gráficos das Figuras 6.6 e 6.8 permitem comparar os deslocamentos relativos dos pisos, verificando-se que o decaimento das oscilações é mais acentuado quando existe dissipação de energia por atrito (associada ao movimento livre do AMD). Tendo em conta os gráficos das Figuras 6.10 e 6.12, pode-se concluir que os valores máximos de acelerações relativas dos pisos não tiveram uma redução significativa. O gráfico da Figura 6.14 também permite verificar a falta de rigidez do AMD, quando o controlador se encontra inactivo, visto que os seus deslocamentos aumentam sem que este restitua à posição inicial.

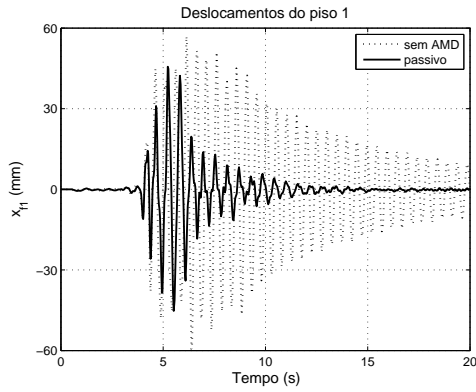


Figura 6.6: Deslocamento do piso 1 - controle passivo

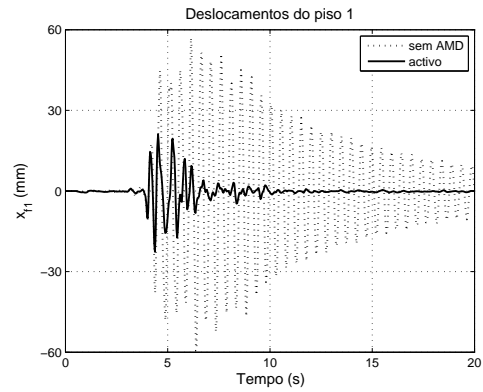


Figura 6.7: Deslocamento do piso 1 - controle ativo

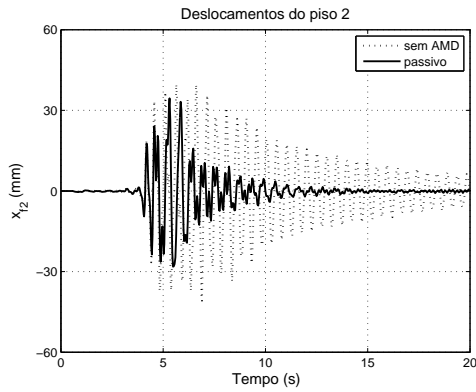


Figura 6.8: Deslocamento do piso 2 - controle passivo

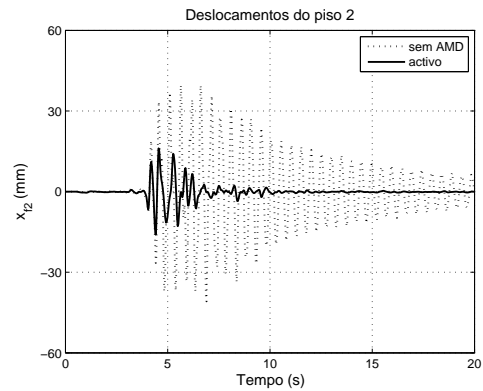


Figura 6.9: Deslocamento do piso 2 - controle ativo

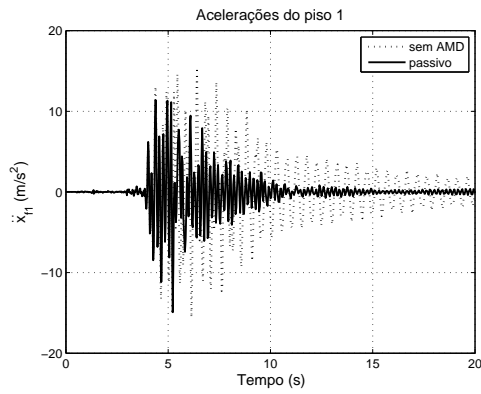


Figura 6.10: Acelerações do piso 1 - controle passivo

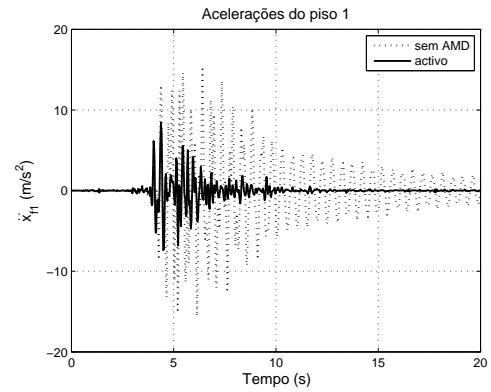


Figura 6.11: Acelerações do piso 1 - controle ativo

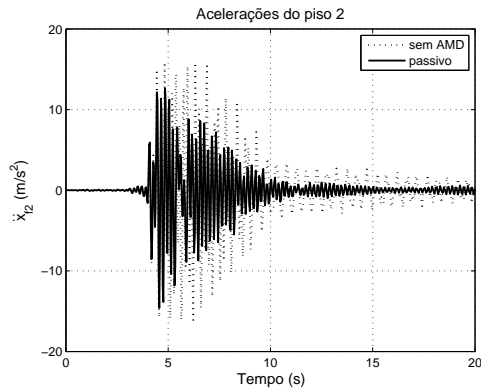


Figura 6.12: Acelerações do piso 2 - controle passivo

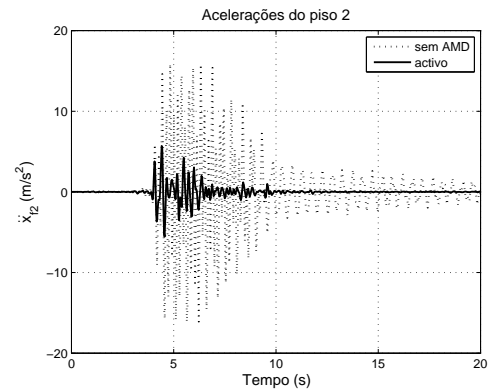


Figura 6.13: Acelerações do piso 2 - controle ativo

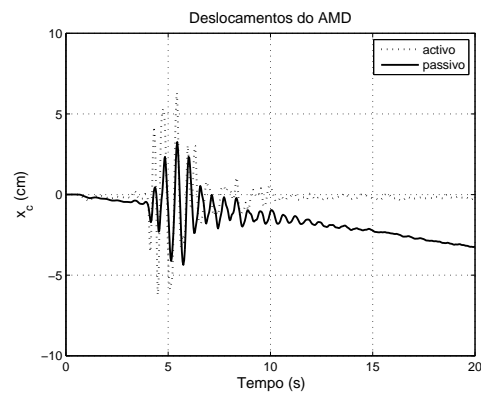


Figura 6.14: Deslocamentos do carro para absorver as vibrações

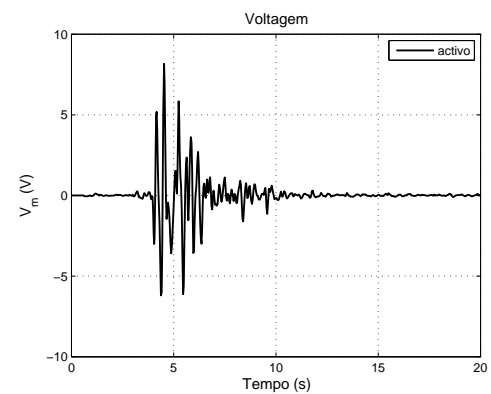


Figura 6.15: Diferença de potencial aplicada ao motor



## Capítulo 7

# Considerações finais

A presente dissertação abordou a problemática das vibrações em estruturas de engenharia civil, exemplificando alguns dos métodos de controlo de vibrações.

Neste trabalho realizou-se uma simulação do funcionamento de um sistema AMD para um modelo laboratorial representativo de um edifício de dois andares. Para dimensionar o controlador foi necessário recolher informação sobre uma área bastante vasta como é a teoria de controlo. Como tal, esta tese apenas reúne as matérias tidas como suficientes para o dimensionamento de controladores para a estrutura em questão.

Foram utilizadas duas estratégias de controlo moderno que recorrem à formulação de espaço de estados. A primeira metodologia abordada foi a alocação de pólos que permite alterar directamente as características dinâmicas da estrutura pela modificação do posicionamento dos pólos do sistema. De seguida, estudou-se a implementação da técnica de controlo óptimo LQR que resulta da minimização de uma função de custo.

O dimensionamento baseou-se em especificações dinâmicas de modo caracterizar o comportamento da estrutura. O método da alocação de pólos permite alterar as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento de cada modo de vibração. No entanto, não é possível ter em conta o gasto de energia associado ao controlo da estrutura.

A estratégia de controlo LQR tem em conta o consumo de energia necessária para absorver as vibrações da estrutura. O dimensionamento do controlador realiza-se através do ajuste das matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  para que o sistema cumpra as especificações dinâmicas. Contudo, existe a necessidade de efectuar várias iterações para que o sistema adquira as características pretendidas.

Um dos parâmetros mais importantes no sistema de controlo é a limitação da tensão eléctrica para que não ocorra saturação do sinal de controlo. Apesar de se poder ter em conta o esforço de controlo, o método LQR apenas fornece uma solução matemática do problema e como tal não considera as limitações físicas do sistema. Os ganhos obtidos pelo controlador óptimo fazem variar as frequências próprias da estrutura o que conduz a maiores gastos de energia. Neste aspecto o método da alocação de pólos é mais eficaz, pois os pólos podem ser posicionados de forma a alterar apenas os coeficientes de amortecimento, o que conduz a esforços de controlo menores.

Por intermédio da simulação de uma acção sísmica foi possível verificar a eficiência do sistema de controlo quando se aumenta o amortecimento dos modos de vibração para 40%. O modelo desenvolvido também permitiu aferir o comportamento da estrutura quando o sistema não é alimentado, ou seja, o carro funcionou como um dispositivo de controlo passivo, dissipando energia por atrito.

O estudo do sistema AMD-2 permitiu aferir alguns dos problemas inerentes ao dimensionamento de sistemas de controlo. No entanto, por ser uma estrutura simples com poucos pisos não existiram problemas relativos à controlabilidade, ou seja, todos os estados podiam ser alterados por intermédio da acção de controlo. Em estruturas reais a definição da posição do controlador é um tópico importante, por vezes poderá ser mesmo necessária a utilização de vários controladores para que todos os modos de vibração sejam modificados.

Para estruturas reais, os métodos de controlo por realimentação de estados necessitam da implementação de um observador. O dimensionamento de um observador depende da dinâmica da estrutura, ou seja, o observador deve adquirir uma dinâmica rápida para que os valores usados na retroacção sejam fiáveis. O presente trabalho permitiu compreender o funcionamento de um observador de ordem completa, visto que nem todos os estados estavam disponíveis através das medições dos sensores instalados.

O estudo realizado permite compreender os problemas inerentes à implementação de um sistema de controlo de vibrações. No entanto, todos os resultados foram obtidos através de uma simulação que não teve em conta as não-linearidades do sistema. Futuramente, será importante realizar testes experimentais de forma a validar o dimensionamento realizado na presente dissertação. No que se refere à simulação, poderão efectuar-se alterações de modo a torná-la mais realista. Por exemplo, fazer com que o controlo apenas actue se os sensores verificarem um certo valor de deslocamento, velocidade ou aceleração. O modelo desenvolvido poderá ter também em conta o tempo de atraso entre as medições das respostas e a acção de controlo.

Será igualmente interessante verificar a eficiência deste tipo de controlador num modelo com maior número de pisos. Poderão também utilizar-se outras estratégias de dimensionamento para comparar com os resultados obtidos neste trabalho.

# Bibliografia

- [1] IPQ, "Eurocódigo 8: Projecto de estruturas para resistência aos sismos parte 1: Regras gerais, acções sísmicas e regras para edifícios", NP EN 1998-1, Lisboa, 2009.
- [2] Luis Antonio Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [3] Yong-Yan Cao, Zongli Lin, and D.G. Ward. An antiwindup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(1):140–145, January 2002.
- [4] Finley A. Charney. Unintended consequences of modeling damping in structures. *Journal of Structural Engineering*, 134(4):581–592, 2008.
- [5] Anil K. Chopra. *Dynamics of Structures*. Prentice Hall, 1995.
- [6] A.Cunha e E.Caetano C.Moutinho. Implementation of an active mass damper to control vibrations in a lively footbridge. In *3rd Eccomas thematic conference on smart structures and materials*, 2007.
- [7] Rui Neves da Silva. *Teoria de Sistemas - Texto de apoio à disciplina*. FCT/UNL.
- [8] T.T. Soong e B.F. Spencer Jr. Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice. *Engineering Structures*, 24:243–259, 2002.
- [9] João Azevedo e Luís Guerreiro. Current status of seismic isolation and energy dissipation R&D and applications for buildings, bridges and viaducts, in Portugal. In *10th World Conference on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Vibrations Control of Structures, Istanbul, Turkey*, 2007.
- [10] Karl Johan Aström e Richard M. Murray. *Feedback Systems*. Princeton University Press, 2008.
- [11] B.F. Spencer Jr. e S.Nagarajaiah. State of the art of structural control. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 129:845–856, 2003.
- [12] David J. Powell Gene F. Franklin and Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA, 4th edition, 2001.
- [13] Yoshiki Ikeda. Active and semi-active vibration control of buildings in Japan-practical applications and verification. *Structural Control and Health Monitoring*, 16(7-8):703–723, 2009.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [14] L. Janke, C. Czaderski, M. Motavalli, and J. Ruth. Applications of shape memory alloys in civil engineering structures—overview, limits and new ideas. *Materials and Structures*, 38:578–592, 2005. 10.1007/BF02479550.
- [15] Henry L. Langhaar. *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [16] Hongnan Li and Linsheng Huo. Advances in structural control in civil engineering in China. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010:23 pages, 2010.
- [17] Erol Uyar Ömar Oral, Levent Çetin. A novel method on selection of Q and R matrices in the theory of optimal control. *International Journal of Systems Control*, 1:84–92, 2010.
- [18] Daniela Marinova and Vasil Marinov. Numerical design of optimal active control for seismically-excited building structures. In *Numerical Analysis and Its Applications*. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [19] C.M.R. Moutinho. *Controlo de vibrações em estruturas de engenharia civil*. PhD thesis, Departamento de engenharia civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2007.
- [20] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., 2nd edition, 1990.
- [21] A. Preumont and K. Seto. *A Comparison of Passive, Active and Hybrid Control, in Active Control of Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2008.
- [22] Quanser Consulting. *AMD-2 User Manual*.
- [23] Quanser Consulting. *AMD-2 Vibration Control Laboratory - Instructor Manual*.
- [24] Quanser Consulting. *AMD-2 Vibration Control Laboratory - Student Handout*.
- [25] F.P.A. Santos and C.Cismasiu. Shape memory alloys in structural vibration control. *Centro de Investigação em Estruturas e Construção - UNIC, FCT/UNL, Portugal*.
- [26] Jr. Spencer, B.F. and M.K. Sain. Controlling buildings: a new frontier in feedback. *Control Systems Magazine, IEEE*, 17(6):19–35, December 1997.
- [27] Daniel S. Stutts. *Analytical Mechanics - Lagrange's Equation and its Application*, 2007.
- [28] M. A. Riley R. C. LIN M. Higashino T. T. Soong, A. M. Reinhorn. Full-scale implementation of active control. II: installation and performance. *ASCE*, 119:1935–1960, 1993.
- [29] Y. P. Wang T. T. Soong, A. M. Reinhorn. Full-scale implementation of active control. I: Design and simulation. *ASCE*, 117:3516–3536, 1991.
- [30] Ashish Tewari. *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*. John Wiley & Sons, 2 edition, 2002.
- [31] T.K.Datta. A state-of-the-art review on active control of structures. *Journal of Earthquake Technology, ISET*, vol. 40:1–17, 2003.

- [32] Y. P. Wang. *Fundamentals of Seismic Base Isolation*. International training program for seismic design of building structures, sponsored by National Science Council, National Chiao-Tung University, Hsinchu, Taiwan., 2002.
- [33] Masashi Yamamoto, Satoru Aizawa, Masahiko Higashino, and Kotaro Toyama. Practical applications of active mass dampers with hydraulic actuator. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(11):1697–1717, 2001.
- [34] Chunwei Zhang and Jinping Ou. Control strategies and experimental verifications of the electromagnetic mass damper system for structural vibration control. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 7:181–192, 2008. 10.1007/s11803-008-0828-5.



## Apêndice A

# Representação matemática de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

A partir das equações do movimento de um sistema físico, é possível deduzir outro tipo de representação matemática do mesmo. Para tal efeito, fazem-se considerações simplificativas como a *Linearidade*. Um sistema diz-se linear quando satisfaz o *princípio da sobreposição*. Para melhor compreender este princípio, considere-se um sistema com entrada  $u_1(t)$  que produz uma saída  $y_1(t)$  e quando sujeito a uma entrada  $u_2(t)$  produz uma saída  $y_2(t)$ . O sistema satisfaz o princípio da sobreposição se quando excitado por  $au_1(t) + bu_2(t)$  produzir a resposta  $ay_1(t) + by_2(t)$ .

$$\begin{array}{ccc} u_1(t) & \rightarrow & y_1(t) \\ u_2(t) & \rightarrow & y_2(t) \\ \therefore au_1(t) + bu_2(t) & \rightarrow & ay_1(t) + by_2(t) \quad \forall u_1, u_2, a, b \end{array}$$

Por vezes, ao estabelecer-se um modelo matemático, a partir das leis da física, obtêm-se equações não-lineares. Contudo é possível deduzir um modelo linear que resulte numa boa aproximação, supondo que as variáveis do sistema variam muito pouco em relação a um ponto de funcionamento nominal.

Existem sistemas físicos cuja dinâmica não se altera, substancialmente, com o tempo. Ou seja, uma perturbação  $u(t)$  provoca uma resposta  $y(t)$ , para qualquer que seja  $t$ . Estes sistemas consideram-se invariantes no tempo, e o seu processo de modelação torna-se mais simples [2].

$$\begin{array}{ccc} u(t) & \rightarrow & y(t) \\ u(t - \tau) & \rightarrow & y(t - \tau) \quad \forall u(t), \tau \end{array}$$

### A.1 Transformada de Laplace

As equações do movimento traduzem-se em equações lineares de segunda ordem, como tal o método da transformada de Laplace pode ser útil pois converte equações diferenciais numa função algébrica de apenas uma variável complexa  $s$ .

A Transformada de Laplace da função  $f(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.1})$$

A resolução do integral, presente na equação (A.1), nem sempre é fácil de se obter, no entanto existe uma tabela com as Transformadas de Laplace mais comuns. Para transformar equações para o domínio de Laplace é necessário conhecer as suas propriedades. A Tabela A.1 contem as propriedades relevantes, no âmbito deste trabalho.

Tabela A.1: Propriedades da Transformada de Laplace

<b>linearidade:</b>	$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$
<b>derivadas:</b>	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$
<b>teorema do valor inicial:</b>	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$
<b>teorema do valor final:</b>	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
<b>convolução:</b>	$\mathcal{L}[f(t) \star g(t)] = F(s)G(s)$

## A.2 Transformada Inversa de Laplace

O processo que permite transformar uma equação dependente da variável complexa  $s$  numa equação dependente do tempo  $t$  denomina-se Transformação Inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Após efectuar as operações algébricas no domínio da variável complexa  $s$ , existe a necessidade de avaliar a resposta de um determinado sistema no domínio do tempo. A função  $f(t)$  é obtida, a partir de  $F(s)$ , pela seguinte equação:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (t > 0) \quad (\text{A.2})$$

onde  $c$ , abcissa de convergência, é uma constante real e é maior que as partes reais de todos os pontos singulares de  $F(s)$ . Portanto a trajectória de integração é paralela ao eixo imaginário e está deslocada de um valor  $c$  deste. A trajectória de integração situa-se à direita de todos os pontos singulares.

A integração presente na equação (A.2) não é de fácil obtenção, no entanto é possível recorrer à tabela de Transformadas inversas de Laplace. Caso a função em questão não esteja presente na tabela, será útil expandir  $F(s)$  em funções parciais, reescrevendo  $F(s)$  em termos de Funções mais simples de  $s$  para quais as transformadas inversas de Laplace são conhecidas.



## Apêndice B

### Parâmetros do sistema AMD-2

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
$M_{f1}$	Massa do primeiro piso	1.160	kg
$M_{f2}$	Massa do segundo piso (com cremalheira)	1.380	kg
$K_{f1}$	Constante de rigidez linear do primeiro piso	500	N/m
$K_{f2}$	Constante de rigidez linear do segundo piso	500	N/m
$M_c$	Massa total do carro(com duas massas adicionais)	0.650	kg
$R_m$	Resistência da armadura do motor	2.6	$\Omega$
$K_t$	Constante de torção do motor	0.00767	N.m/A
$K_m$	Constante de força electromotriz	0.00767	V.s/rad
$J_m$	Momento de inércia do rotor	$3.90 \times 10^{-7}$	$Kg.m^2$
$K_g$	Relação da engrenagem da caixa planetária	3.71	-
$\eta_g$	Eficiência da caixa planetária	100	%
$\eta_m$	Eficiência do motor	100	%
$r_{mp}$	Raio do pinhão do motor	$6.35 \times 10^{-3}$	m
$B_{eq}$	Coefficiente de amortecimento viscoso equivalente	3.0	N.s/m

#### B.1 Matrizes referentes à representação em espaço de estados do sistema AMD-2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{f1}}{M_{f1}} & \frac{K_{f2}}{M_{f1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{f1}}{M_{f1}} & a_{63} & a_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{43} = \frac{K_{f2} M_c r_{mp}^2}{J_m K_g^2 (M_c + M_{f2}) + M_c M_{f2} r_{mp}^2}$$

$$a_{44} = -\frac{B_{eq} r_{mp}^2 (M_c + M_{f2})}{J_m K_g^2 (M_c + M_{f2}) + M_c M_{f2} r_{mp}^2} - \frac{K_g^2 K_m K_t (M_c + M_{f2})}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f2}) + M_c M_{f2} r_{mp}^2) R_m}$$

$$\begin{aligned}
 a_{63} &= \frac{-K_{f_2} M_c^2 r_{mp}^2}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) (M_c + M_{f_2})} - \frac{K_{f_2} (M_c + M_{f_1} + M_{f_2})}{(M_c + M_{f_2}) M_{f_1}} \\
 a_{64} &= \frac{B_{eq} M_c r_{mp}^2}{J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2} + \frac{K_g^2 K_m K_t M_c}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) R_m} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left( \frac{K_g K_t (M_c + M_{f_2}) r_{mp}}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) R_m} \right) \\ 0 \\ \left( \frac{-K_g K_t M_c r_{mp}}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) R_m} \right) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{f_1}}{M_{f_1}} & \frac{K_{f_2}}{M_{f_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{f_1}}{M_{f_1}} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 c_{33} &= \frac{-K_{f_2} M_c^2 r_{mp}^2}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) (M_c + M_{f_2})} - \frac{K_{f_2} (M_c + M_{f_1} + M_{f_2})}{(M_c + M_{f_2}) M_{f_1}} \\
 c_{34} &= \frac{B_{eq} M_c r_{mp}^2}{J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2} + \frac{K_g^2 K_m K_t M_c}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) R_m} \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{-K_g K_t M_c r_{mp}}{(J_m K_g^2 (M_c + M_{f_2}) + M_c M_{f_2} r_{mp}^2) R_m} \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Apêndice C

# Obtenção da matriz de ganho do controlador pelo método LQR

Considere-se um sistema representado pela equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

cujo sinal de controlo é dado por

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

De onde resulta a equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (\text{C.1})$$

Admitindo que o sistema é estável a função de custo quadrática  $J$  passa a ser dada por

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)dt$$

De acordo com a análise de sistemas lineares invariantes no tempo [20]

$$\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t))$$

e tendo em conta a equação (C.1), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) &= -\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = \\ &= -\mathbf{x}^T(t)[(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})]\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Comparando ambos os lados da equação (C.2), conclui-se que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}) \quad (\text{C.3})$$

Pela segunda lei de Liapunov [20], se  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  for estável, existe uma matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  que satisfaz a equação (C.3). Para obter a solução do problema de controlo óptimo quadrático, efectua-se o seguinte procedimento:

## Obtenção da matriz de ganho do controlador pelo método LQR

---

Sendo  $R$  uma matriz Hermitiana definida positiva, é possível escrever

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$$

onde  $\mathbf{T}$  é uma matriz não singular. Substituindo  $\mathbf{R}$  na equação C.3, resulta

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{TK} = 0$$

podendo esta equação ser reescrita da forma

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} + [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

A minimização do índice  $J$  requer a minimização da seguinte equação

$$\mathbf{x}^T(t) [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x}(t) \quad (\text{C.4})$$

em relação a  $\mathbf{K}$ . Sendo a equação (C.4) não-negativa, o mínimo ocorre quando esta vale zero, ou seja quando

$$\mathbf{TK} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

A matriz de ganho do controlador óptima é dada pela seguinte equação

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\text{C.5})$$

Assim o vector de entrada que minimiza o índice de performance  $J$  é dado pela seguinte equação

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (\text{C.6})$$

onde  $P$  deve satisfazer a equação matricial reduzida de Riccati:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (\text{C.7})$$

## Apêndice D

# Obtenção das equações do movimento para solicitação sísmica

A Figura D.1 representa o sistema AMD-2, indicando os graus de liberdade considerados e as acções externas. Os pisos são considerados como infinitamente rígidos e as massas concentradas ao nível dos graus de liberdade  $x_c$ ,  $x_{f1}$  e  $x_{f2}$ .

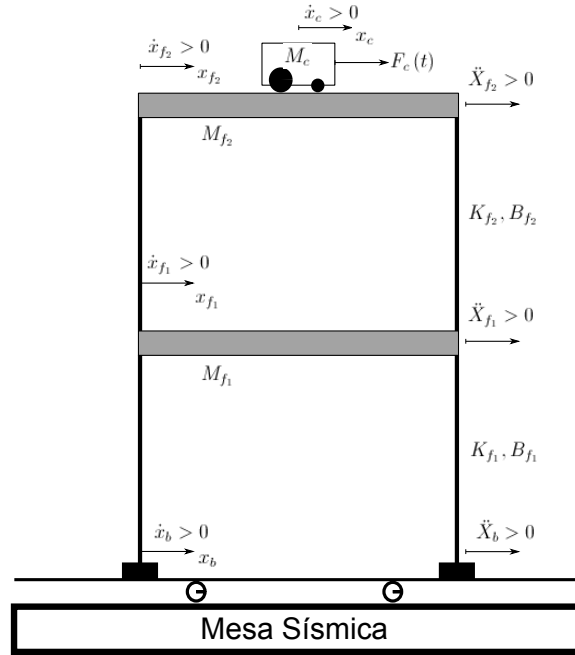


Figura D.1: AMD-2 - com aceleração de base

Ao modelar a rigidez lateral dos pisos com molas lineares, a energia potencial pode ser descrita pela seguinte equação:

$$V_{total} = \frac{1}{2}K_{f1}x_{f1}(t)^2 + \frac{1}{2}K_{f2}x_{f2}(t)^2 \quad (D.1)$$

A parcela de translação depende das massas  $M_c$ ,  $M_{f1}$ ,  $M_{f2}$  e das respectivas velocidades absolutas, em relação ao seu centro de gravidade. A energia de rotação do motor depende da

velocidade do AMD e das sua inércia de rotação.

$$Tr_c = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c(t)^2}{r_{mp}^2} \quad (D.2)$$

$$Tt_c = \frac{1}{2} M_c (\dot{x}_c(t) + \dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (D.3)$$

$$Tt_{f_1} = \frac{1}{2} M_{f_1} (\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (D.4)$$

$$Tt_{f_2} = \frac{1}{2} M_{f_2} (\dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (D.5)$$

Somando as equações (D.2), (D.3), (D.4) e (D.5) obtém-se a energia cinética total do sistema.

$$\begin{aligned} T_{total} = & \frac{1}{2} \left( M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) \dot{x}_c(t)^2 + M_c (\dot{x}_b(t) + \dot{x}_{f_1}(t) + \dot{x}_{f_2}(t)) \dot{x}_c(t) + \\ & + \frac{1}{2} (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \dot{x}_b(t)^2 + (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \dot{x}_{f_1}(t) \dot{x}_b(t) + \\ & + (M_c + M_{f_2}) \dot{x}_{f_2}(t) \dot{x}_b(t) + \frac{1}{2} (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \dot{x}_{f_1}(t)^2 + \\ & + (M_c + M_{f_2}) \dot{x}_{f_1}(t) \dot{x}_{f_2}(t) + \frac{1}{2} (M_c + M_{f_2}) \dot{x}_{f_2}(t)^2 \end{aligned} \quad (D.6)$$

Aplicando as equações de Lagrange para cada coordenada generalizada obtém-se as equações que regem o movimento da estrutura quando sujeita a uma solicitação de base.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{x_c}^{nc} \quad (D.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_1}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_1}} \right) = Q_{x_{f_1}}^{nc} \quad (D.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f_2}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{f_2}} \right) = Q_{x_{f_2}}^{nc} \quad (D.9)$$

Onde  $Q_i^{nc}$  representa o somatório das forças não conservativas, ou forças generalizadas, aplicadas na direcção da coordenada generalizada  $i$ .

Para o sistema em questão, as forças generalizadas  $Q_{x_c}^{nc}$ ,  $Q_{x_{f_1}}^{nc}$  e  $Q_{x_{f_2}}^{nc}$  são dadas por:

$$Q_{x_c}^{nc}(t) = F_c(t) - B_{eq} \dot{x}_c(t) \quad (D.10)$$

$$Q_{x_{f_1}}^{nc}(t) = Q_{x_{f_2}}^{nc}(t) = 0 \quad (D.11)$$

Resolvendo as equações (D.7), (D.8) e (D.9) resultam as equações do movimento:

$$\left( M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}_c(t) + M_c (\ddot{x}_{f_1}(t) + \ddot{x}_{f_2}(t)) = F_c(t) - B_{eq} \dot{x}_c(t)$$

$$K_{f_1} x_{f_1}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_1} + M_{f_2}) \ddot{x}_b(t) + \\ + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) = 0$$

$$K_{f_2} x_{f_2}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_1}(t) + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_{f_2}(t) + \\ + (M_c + M_{f_2}) \ddot{x}_b(t) = 0$$